

16R

ثانيًا : د

ثانيًا : ج

٧٤ أولًا : ج

ثانيًا : ب ٣٠ ج
٣٤ د ٣٥ ب

تانيا

1

٦

٣

مسائل على القوى المتوازية

ដំបូង

٥

- ٢٦ ب ٢٧ ج ٢٨ د ٢٩ ح ٣٠ ب
٣١ ا ٣٢ ج ٣٣ ب ٣٤ د ٣٥ ج
٣٦ ح ٣٧ ب ٣٨ ب ٣٩ ج ٤٠ ا
٤١ ح ٤٢ ج ٤٣ ا ٤٤ ب ٤٥ د
٤٦ ا ٤٧ ب ٤٨ ج ٤٩ ح ٥٠ ا
٥١ ا ٥٢ ح ٥٣ ج ٥٤ د ٥٥ ج
٥٦ د ٥٧ ب ٥٨ د ٥٩ ح ٦٠ ب
٦١ ب ٦٢ ب ٦٣ ا

- ٦٤ أولاً : ب
٦٥ ب
٦٦ د
٦٧ ب ٦٨ ب ٦٩ د ٧٠ ج ٧١ د
٧٢ ح ٧٣ د ٧٤ ا ٧٥ ج ٧٦ د
٧٧ ب ٧٨ ج ٧٩ د ٨٠ د ٨١ ا
٨٢ ب ٨٣ ب ٨٤ ا ٨٥ ب ٨٦ ب
٨٧ ب ٨٨ ب ٨٩ ا ٩٠ ج ٩١ ا
٩٢ ب ٩٣ ح ٩٤ د ٩٥ د ٩٦ د
٩٧ ب

سادساً مسائل على مركز الثقل

- ١ د ٢ ب ٣ ب ٤ ا ٥ ب
٦ ح ٧ ج ٨ ب ٩ ج ١٠ ب
١١ ح ١٢ ب ١٣ ج ١٤ د ١٥ ب
١٦ د ١٧ ج ١٨ د ١٩ ب ٢٠ ا
٢١ ا ٢٢ ب ٢٣ ج ٢٤ ج ٢٥ د
٢٦ ا ٢٧ ب ٢٨ ب ٢٩ ج ٣٠ ا
٣١ ح ٣٢ ج ٣٣ ج ٣٤ د ٣٥ د
٣٦ ا ٣٧ ج ٣٨ د ٣٩ ا ٤٠ ب
٤١ ب ٤٢ ا ٤٣ ب ٤٤ د ٤٥ ج
٤٦ د ٤٧ ج ٤٨ ج ٤٩ ح ٥٠ ا
٥١ ح ٥٢ ا ٥٣ ب ٥٤ د ٥٥ ا
٥٦ ج ٥٧ ا ٥٨ ج ٥٩ ح ٦٠ د
٦١ د ٦٢ ب ٦٣ ب ٦٤ ج ٦٥ ج
٦٦ ب ٦٧ ا ٦٨ ج ٦٩ ب ٧٠ ب
٧١ ح ٧٢ ب ٧٣ ج ٧٤ ب ٧٥ ب
٧٦ ا ٧٧ ب ٧٨ ا ٧٩ ا ٨٠ د
٨١ ب ٨٢ ا ٨٣ ا ٨٤ ب
٨٥ أولاً : د
٨٦ ا
٨٧ ح ٨٨ ج ٨٩ ا ٩٠ ج ٩١ د
٩٢ ب ٩٣ ب ٩٤ أولاً : د
٩٥ ب

٨٥ أولاً : د
٨٦ ا
٨٧ ح ٨٨ ج ٨٩ ا ٩٠ ج ٩١ د
٩٢ ب ٩٣ ب ٩٤ أولاً : د
٩٥ ب

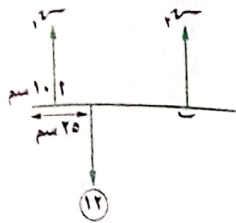
- ١٦ ح ١٧ ب ١٨ ا ١٩ ا ٢٠ ب
٢١ ح ٢٢ ج ٢٣ ا ٢٤ ب ٢٥ ا
٢٦ د ٢٧ ج ٢٨ د ٢٩ ب ٣٠ ج
٣١ ا ٣٢ ا ٣٣ د ٣٤ ج ٣٥ د
٣٦ ح ٣٧ ا ٣٨ ب ٣٩ ج ٤٠ ا
٤١ ح ٤٢ ا ٤٣ ا ٤٤ ب ٤٥ ا
٤٦ د ٤٧ ب ٤٨ د ٤٩ ا ٥٠ ا
٥١ ب ٥٢ ب ٥٣ ا ٥٤ ب ٥٥ ا
٥٦ ح ٥٧ ب ٥٨ ب ٥٩ ج ٦٠ ب
٦١ ا ٦٢ د ٦٣ ا ٦٤ ج ٦٥ د
٦٦ ا ٦٧ د ٦٨ ج ٦٩ د ٧٠ ب
٧١ ح ٧٢ ب ٧٣ ب ٧٤ ج ٧٥ ب
٧٦ ح ٧٧ ا ٧٨ ا ٧٩ ج ٨٠ ب
٨١ ب ٨٢ ج ٨٣ ب ٨٤ ب ٨٥ ج
٨٦ د ٨٧ د ٨٨ ب ٨٩ د ٩٠ ب
٩١ ب ٩٢ ا ٩٣ ج ٩٤ ا ٩٥ ب
٩٦ ح ٩٧ ج ٩٨ ا ٩٩ ا ١٠٠ ب
١٠١ ب ١٠٢ ب ١٠٣ د ١٠٤ ا ١٠٥ د
١٠٦ ح ١٠٧ د ١٠٨ ب

رابعاً مسائل على الاتزان العام

- ١ د ٢ ا ٣ ب ٤ ا ٥ د
٦ د ٧ ا ٨ ج ٩ ج ١٠ ا
١١ ح ١٢ ا ١٣ ج ١٤ د ١٥ د
١٦ ب ١٧ ا ١٨ د ١٩ ا ٢٠ د
٢١ ا ٢٢ ا ٢٣ د ٢٤ د ٢٥ ب
٢٦ ا ٢٧ د ٢٨ ج ٢٩ ا ٣٠ د
٣١ ح ٣٢ ا ٣٣ د ٣٤ د ٣٥ د
٣٦ ح ٣٧ ا ٣٨ ج ٣٩ ج ٤٠ ب
٤١ ح ٤٢ ا ٤٣ ب ٤٤ ا ٤٥ د
٤٦ ب ٤٧ ب ٤٨ د ٤٩ ب ٥٠ د
٥١ ح ٥٢ ج ٥٣ ب ٥٤ ا ٥٥ ج
٥٦ ا

خامساً مسائل على الاوضاع

- ١ ب ٢ د ٣ د ٤ د ٥ د
٦ ب ٧ ب ٨ ب ٩ ا ١٠ ج
١١ ح ١٢ ا ١٣ ا ١٤ ج ١٥ د
١٦ ح ١٧ ج ١٨ ا ١٩ ج ٢٠ ج
٢١ ا ٢٢ د ٢٣ ج ٢٤ ب ٢٥ ب



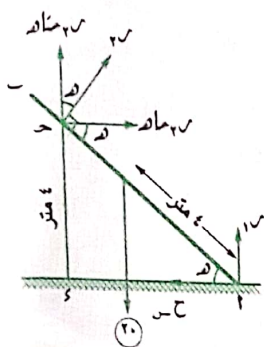
٧ (أ)

الحل

$$\Sigma \tau = 0$$

$$\therefore -60 \times 1.2 + 120 \times 2.5 = 0$$

$$\therefore 9 = 1 \text{ ث.كجم}$$



٨ (أ)

الحل

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 3 = 2 \text{ متر}$$

$$\therefore 5 = 2 \text{ متر}$$

$$\therefore 3 = 2 \text{ متر}$$

معادلات الاتزان :

$$(1) \quad 20 \text{ حاه} = 10 \text{ حاه} \therefore \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

$$20 = 10 + 10$$

$$(2) \quad 20 = 10 + 10$$

$$\therefore 20 = 10 + 10$$

$$\therefore 20 = 10 + 10$$

$$\therefore 9, 6 = 1 \text{ ث.كجم}$$

$$\text{من (1)} : \therefore 7, 68 = 1 \text{ حاه}$$

$$\text{من (2)} : \therefore 14, 24 = 1 \text{ حاه}$$

$$\therefore \frac{48}{89} = \frac{7, 68}{14, 24} = \frac{1}{1}$$

٩ (ب)

الحل

$$10 \times 10 = 10 \times 10$$

$$\therefore 10 = 10$$

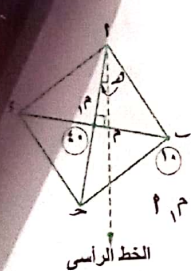
$$\therefore 10 = 10$$

$$\therefore 10 = 10$$

$$\therefore \frac{10}{10} = \frac{10}{10}$$

$$\text{في } \Delta 10 \text{ م نفرض أن : ح (د 10 م) = ح}$$

$$\therefore \frac{10}{10} = \frac{10}{10}$$



النموذج الأول

١ (أ)

٢ (أ)

الحل

$$6 \times 5 = 30 \text{ نيوتن.سم.}$$

$$\therefore \text{معيار العزم عند } 20 \text{ نيوتن.سم.}$$

٣ (ب)

٤ (ب)

الحل

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \text{ نيوتن.}$$

٥ (أ)

الحل



نفرض أن مركز ثقل الجسمين م

$$\text{النسبة بين الكتلتين} = 9 : 6 = 3 : 2$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{10}{20}$$

$$\therefore 10 = 10 \text{ متر}$$

$$\therefore 10 = 10 \text{ متر}$$

$$\therefore 6 = 10 \text{ متر}$$

٦ (ب)

الحل

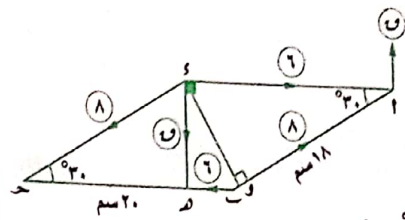
$$\begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{س} \times \overline{ص} = \overline{ع}$$

$$2 \times 2 + \overline{ص} \times 4 + \overline{ع} \times 1 = 0$$

$$\therefore 4 + 4 + 1 = 0 \therefore 3 = 1$$



١٨ الحل



$$س = ١٨ \text{ م } ٢٠ \text{ م } ٩ \text{ سم}$$

$$و = ٢٠ \text{ م } ٢٠ \text{ م } ١٠ \text{ سم}$$

القوتين (٦، ٦) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$ج = ٩ \times ٦ = ٥٤ \text{ نيوتن سم}$$

القوتين (٨، ٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$ج = ٨ \times ٨ = ٦٤ \text{ نيوتن سم}$$

$$ج = ج + ج = ٢٦ \text{ نيوتن سم}$$

القوتان (٢، ٢) تكونان ازدواجاً معيار عزمه

$$٢٦ = ٢٦ \text{ نيوتن سم}$$

$$٢٦ = ٢٠ \times ١,٣ \text{ نيوتن}$$

$$١,٣ \text{ نيوتن}$$

١٩ الحل

$$\vec{r} = \vec{r} = (٢, ٠)$$

$$\vec{r} = \vec{r} = (١ \times ٢ - ٢ \times ٠) = ٢$$

$$ل = \frac{\|\vec{r}\|}{\sqrt{(٢-)^2 + (١-)^2}} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤ \text{ وحدة طول}$$

٢٠ الحل

الجسم على وشك الانزلاق لأسفل

تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل

المستوى بزاوية قياسها ٣٠

$$س = ٣٠ \text{ م } ٣١ = \frac{١}{٣١}$$

الجسم على وشك الحركة لأعلى

$$و = س + ٣٠ \text{ م } ٦٠$$

$$س = ٣٠ \text{ م } ٦٠ = ١٥$$

$$و = ٣٠ \times \frac{١}{٣١} + ١٥ = ١٥,٣$$

$$و = ٣٠ \times ١,٣ = ٣٩ \text{ نيوتن}$$

٢١ الحل

٢٢ الحل

٢٣ الحل

٢٤ الحل

$$و = ٣ - و = ٣$$

$$و = (٦ - و - و) = ٣$$

$$و = ٨ - و + ١٢ = ٢٠$$

٢٥ الحل

بفرض أن كتلة المربع الأضلى هي ٤ ك وتعمل فى النقطة (ل، ل)

والمربع المفصول ك وتعمل فى (ل، ل)

$$س = \frac{ل \times ل - ل \times ل}{ل - ل} = \frac{ل \times ل - ل \times ل}{ل - ل} = ٧$$

الكتلة	ل	ل
س	ل	ل
ص	ل	ل

$$ص = \frac{ل \times ل - ل \times ل}{ل - ل} = \frac{ل \times ل - ل \times ل}{ل - ل} = ٥$$

$$مركز الثقل = (ل، ل)$$

٢٦ الحل

أقل قوة أفقية لازمة لاتزان الجسم هى القوة التى تجعل

الجسم على وشك الحركة

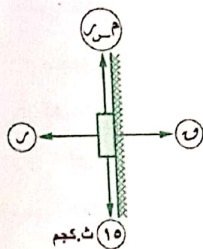
$$و = ١٥$$

$$و = ١٥$$

$$و = ٧٥ \text{ ث.كجم}$$

$$و = ٧٥$$

$$و = ٧٥ \text{ ث.كجم}$$



٢٧ الحل

٢٨ الحل

المجموعة تكافئ ازدواج بعد إضافة القوة التى

مقدارها و نيوتن

$$\frac{و + ١٩}{١٢} = \frac{و + ١٣}{٩}$$

$$٢(و + ١٩) = ١٢(و + ١٣)$$

$$و = ٥٧$$

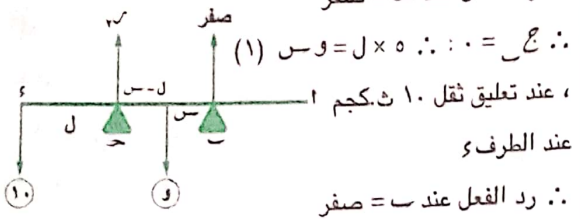
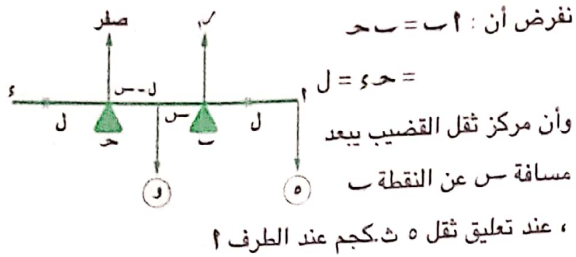
٥ (١)

الحل

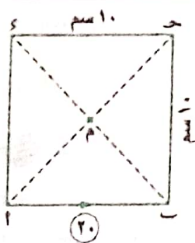
البعد العمودي $= \frac{75}{13} = 5.77$ سم

٦ (١)

الحل



عند $ح = ٠$: $٠ = ل \times ٥ = و \times س$ (١)
عند تعليق ثقل ١٠ ث.كجم
عند الطرف $د$
رد الفعل عند $ب =$ صفر
عند $ح = ٠$: $٠ = ل \times ١٠ = و \times (س - ل)$ (٢)
بقسمة (٢) على (١) : $\frac{ل - س}{س} = ٢$
عند $س = ٢$: $س - ل = ٠$: $س = ل$
عند $س = ٢$: $س = ل$
بالتعويض في (١) : $٠ = ل \times ٥ = و \times \frac{١}{٣} ل$
عند $و = ١٥$ ث.كجم



٧ (ب)

الحل

ح $= ٥ \times ٢٠ = ١٠٠$ نيوتن.سم.

٨ (١)

الحل

القوتان $(٧, ٥)$ و $(٧, ٥)$ تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ح $= ٣٠ \times ٧, ٥ = ٢٢٥$ نيوتن.سم.

القضيب متزن

القوتان $(١٠, ٢)$ و $(١٠, ٢)$ تكونان ازدواجاً معيار عزمه

$= ٢٢٥$ نيوتن.سم.

عند $١٠ = و$ نيوتن.

$٢٢٥ = ح \times ١٠$ ما $٢٢, ٥ = ح$

عند $ح = ٢٢, ٥$ سم

عند $و = ٥$ نيوتن.

وبالتعويض في (١) : $٢ = \frac{٥ + ١٢}{٩}$

عند $٢ = \frac{٥ + ٢٥}{٢(٩) + ٢(١٢)}$

عند مقدار القوة المطلوبة $و = ٥$ نيوتن

٢٩ (١)

الحل

عند $\frac{١}{٥} = \frac{س}{ح}$

عند $٥ = ح + س$: $٦ = ح$

عند $١٠ \times ٥ = ٦ \times ٦$: $١٤ = ح$

٣٠ (١)

الحل

عند $٠ = ح + س = ٢ + ٤ = ٦$

عند $٠ = ح + س = ٢ + ٤ = ٦$

عند $(٨, ٦) \times (٠, ٦) + (٤, ٢) \times (٠, ١)$

$(٤, ٢) \times (٠, ١) =$

عند $١١ = س$: $٤ = ٤٨ + ٤$

عند نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع $أ$ هي $(٠, ١١)$

النموذج الثاني

١ (١)

الحل

عند قوة الاحتكاك النهائي $س = \frac{١}{٣} \times ٣ = ١$ نيوتن

عند الجسم تحت تأثير قوة أفقية تحاول تحريكه

عند $١ \geq ح > ٠$: $س = ١$

عند قوة الاحتكاك $[٠, ١]$

٢ (ب)

٣ (١)

٤ (ب)

الحل

عند $\frac{٩}{٤} = \frac{٣ \times ٢ + ٣ \times ١ + ٠ \times ١}{٢ + ١ + ١}$

عند $٢ = \frac{٤ \times ٢ + ٠ \times ١ + ٠ \times ١}{٢ + ١ + ١}$

عند إحداثيات مركز الثقل $(٢, \frac{٩}{٤})$



ج ٩

الحل

الجسم على وشك الانزلاق

تحت تأثير وزنه فقط

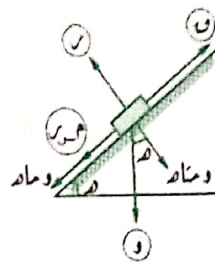
∴ م_س = طام

عند التأثير بقوة U في اتجاه خط

أكبر ميل للمستوى لأعلى كان الجسم

على وشك الحركة لأعلى

∴ U = م_س + و_{م_ا}

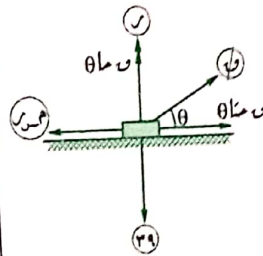


∴ U = م_س + و_{م_ا}

∴ U = م_س × طام + و_{م_ا}

ب ١٠

الحل



U + و_{م_ا} = ٢٩

(١) U + و_{م_ا} = ٢٩

U = و_{م_ا} × ٢

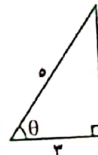
∴ U = و_{م_ا} × ٢

∴ U = و_{م_ا} × ٢

من (١)، (٢):

U = ١٥

U = ٢٧



∴ قوة الاحتكاك السكوني النهائي = م_س = ٢٧ × ١/٣ = ٩ نيوتن.

ب ١١

الحل

$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (6, 0)$

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل = عزم المحصلة حول نفس النقطة.

∴ عزوم القوى (ع_ج) = (٣، ٢) × (٦، ٠) = ١٢ ع_ج

د ١٢

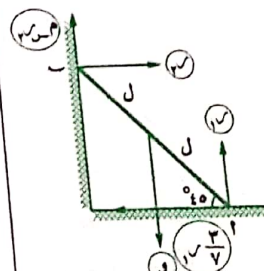
نفرض أن طول السلم = ٢ ل

(١) U + و_{م_ا} = م_س

(٢) U = م_س × ٢/٧

(٣) U + و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

∴ ع_ج = ٠



∴ م_س × و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

∴ م_س × و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

∴ م_س × و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

من (٢): U + و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

∴ U + و_{م_ا} = م_س × ٢/٧

(٤)

١٢

الحل

القوتان (٤، ٤) تكونان

ازدواجاً قياسه الجبري ع_ج

ع_ج = ٤ × ١٠ = ٤٠ نيوتن سم

القوتان (٩، ٩) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري ع_ج

ع_ج = ٩ × ١٠ = ٩٠ نيوتن سم

القوتان (٢٧، ٢٧) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري ع_ج

ع_ج = ٢٧ × ١٠ = ٢٧٠ نيوتن سم

∴ ع_ج = ع_ج + ع_ج + ع_ج = ٤٠ + ٩٠ + ٢٧٠

= ١٥٠ نيوتن سم

∴ معيار العزم = ١٥٠ نيوتن سم

١٤

الحل

قبل التحرك:

U × ٢ = و_{م_ا} × ٢

∴ U = و_{م_ا}

بعد التحرك:

U × ٢ = و_{م_ا} × ٢

∴ U = و_{م_ا}

∴ U = و_{م_ا}

من (١)، (٢) ينتج أن:

U = و_{م_ا}

∴ U = و_{م_ا}

١٥

الحل

(٠، ١٢، ٠) = ع_ج ، (٠، ١٢، ٤) = ع_ج ، (٣، ٠، ٠) = ع_ج

∴ ع_ج = ع_ج + ع_ج + ع_ج = (٣، ٠، ٠) + (٠، ١٢، ٤) + (٠، ١٢، ٠)

إجابات نماذج الامتحانات التدريبية

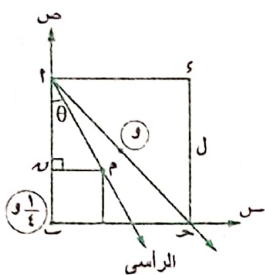
كتلة م = ٩ ك، كتلة م = ٣٦ ك،
 $\therefore \text{م} = (١٢، ٢-)، \text{م} = (١٠، ٦)$

الكتلة	ك -	ك -	ك ٣٦
س	٢ -	٦	٠
ص	١٢ -	١٠	٠

$$\therefore \text{س} = \frac{٠ + ٦ \times \text{ك} - ٢ - \times \text{ك} -}{\text{ك} - ٩ - \text{ك} - ٣٦} = \text{م}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٠ + ١٠ \times \text{ك} - ١٢ - \times \text{ك} -}{\text{ك} - ٩ - \text{ك} - ٣٦} = \text{م}$$

\therefore مركز الثقل = $(٢ -، ٢ -)$



ك	و	و ١/٤
س	١/٤	٠
ص	١/٤	٠

$$\therefore \text{س} = \frac{\frac{١}{٤} \times \text{و}}{\frac{١}{٤} + \text{و}} = \text{م}، \text{ص} = \frac{\frac{١}{٤} \times \text{و}}{\frac{١}{٤} + \text{و}} = \text{م}$$

\therefore مركز الثقل = $(\text{ل} \frac{٢}{٥}، \text{ل} \frac{٢}{٥})$

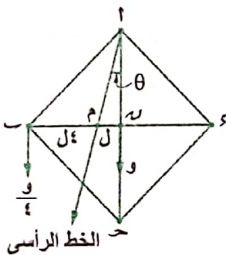
$$\therefore \text{م} = \text{ل} \frac{٢}{٥}، \text{ل} = \text{ل} \frac{٢}{٥} - \text{ل} = \text{ل} \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{ل} \frac{٢}{٥} \div \text{ل} \frac{٣}{٥} = \theta$$

$$\therefore \text{و} = (\text{د ح أ م}) = ٤٥^\circ - \theta$$

$$\therefore \text{ل} = (\text{د ح أ م}) = \frac{\frac{٢}{٥} - ١}{\frac{٢}{٥} + ١}$$

حل آخر:



مركز الثقل م يقسم ل ح حيث

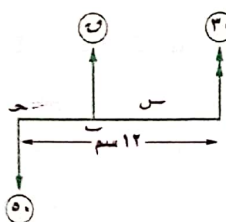
$$\frac{١}{٤} = \frac{\text{م} \text{ ل}}{\text{ل} \text{ م}}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{م}، \text{ل} = \text{م} = \text{ل} \frac{١}{٤}$$

ويكون م هو الرأسى

θ زاوية ميل ح على الرأسى

$$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ل}}{\text{ل} \frac{١}{٤}} = \frac{\text{م} \text{ ل}}{\text{ل} \text{ م}} = \theta$$



٢٠

الحل

$$\text{ح} = ٥٠ - \text{و}$$

$$\therefore ٥٠ - \text{و} = ٢٠$$

$$\therefore \text{و} = ٨٠ \text{ نيوتن}$$

$$\frac{(٣ -، ١٢، ٤)}{\sqrt{(٣ -)^2 + (١٢)^2 + (٤)^2}} \times ١٢٠ = \frac{١٢}{\sqrt{١٦٩}} \times \text{و} = \text{و}$$

$$(٣ -، ١٢٠، ٤٠) =$$

$$(٣، ١٢ -، ٠) = \hat{s} - \hat{f} = \hat{f} s \therefore$$

$$(٣ -، ١٢٠، ٤٠) \times (٣، ١٢ -، ٠) = \hat{u} \times \hat{f} s = \hat{f} s \therefore$$

$$\hat{f} s = \begin{vmatrix} \hat{f} & \hat{u} & \hat{s} \\ ٣ & ١٢ - & ٠ \\ ٣ - & ١٢٠ & ٤٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٢ - & ٠ \\ ٣ - & ١٢٠ & ٤٠ \end{vmatrix}$$

١٦

الحل

من معادلات الاتزان

$$\text{س} + \text{ص} = ٤٠$$

$$\text{و} = \text{ح}$$

$$\therefore ٤٠ = \text{و} \times ٣٠ + \text{و} \times ٢٠$$

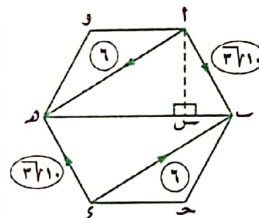
$$\therefore \text{و} = ٢٠ \text{ ث.كجم}$$

$$\text{من (١)}: \therefore \text{و} = ١٠ \text{ ث.كجم}$$

$$\therefore \text{و} = ٢٠ \text{ ث.كجم}$$

١٧

الحل



$$\therefore \text{القوتين } (٣\sqrt{١٠}، ٣\sqrt{١٠})$$

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ح)

$$\therefore \text{ح} = ٣\sqrt{١٠} \times ٣\sqrt{١٠} = ٣٠$$

$$= ٣٠ \text{ ل نيوتن سم}$$

$$\therefore \text{القوتين } (٦، ٦) \text{ تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ح)}$$

$$\therefore \text{ح} = ٦ \text{ ل نيوتن سم}$$

$$\therefore \text{ح} = ٦ + ٣٠ = ٣٦ \text{ ل نيوتن سم}$$

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = ٢٤ \text{ ل نيوتن سم}$$

١٨

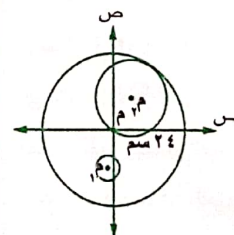
الحل

$$\text{مساحة م} : \text{م} : \text{م} =$$

$$\pi ١٦ : \pi ١٤٤ : \pi ٥٧٦ =$$

$$٣٦ : ٩ : ١ =$$

بفرض أن كتلة م = ك



ح	ب	أ	
٢٠	٤٠	٢٠	الكتلة
١٥	٠	٠	س
٠	١٢	٠	ص

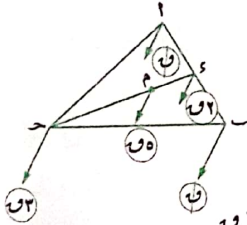
$$٥ = \frac{١٥ \times ٢٠ + ٠ \times ٤٠ + ٠ \times ٢٠}{٩٠} = \text{س} \text{ م}$$

$$\frac{١٦}{٣} = \frac{٠ \times ٢٠ + ١٢ \times ٤٠ + ٠ \times ٢٠}{٩٠} = \text{ص} \text{ م}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = (٥, \frac{١٦}{٣})$$

في مركز الكرة	في أ	
$\frac{١}{٣}$	١	الكتلة
١١٠	٥٠	س

$$\therefore \text{س} \text{ م} = \frac{١١٠ \times \frac{١}{٣} + ٥٠ \times ١}{١,٥} = ٧٠ \text{ سم}$$



∴ محصلة القوتين (٢، ٢)
هي قوة مقدارها ٢٠
وتؤثر في نقطة (س)

∴ محصلة القوى ٢، ٢، ٥، ٢، ٢

هي قوة مقدارها ١٠ وتؤثر في نقطة تبعد عن
ح مسافة س سم

∴ مجموع عزوم القوى حول ح = عزم المحصلة حول ح

$$-20 \times ٢ - 20 \times ٥ = 20 \times ١٠ - س \times ٢٠$$

$$\therefore س = ١٦ \text{ سم}$$

٢٩ د

الحل

مقدار عزم القوة ٢٠ نيوتن حول النقطة أ يساوي

$$٢٠ \times ١٥ = ٣٠٠ \text{ ما}$$

$$\text{حيث } ١٨٠ \geq \theta \geq ٠$$

$$\text{أي أن } ١ \geq \theta \geq ٠$$

أصغر قيمة لمقدار العزم = $٣٠٠ \times \text{صفر} = \text{صفر}$

وأكبر قيمة لمقدار العزم = $١ \times ٣٠٠ = ٣٠٠$

أي أنه: مقدار عزم القوة $\in [٣٠٠, ٠]$

$$٠ = ١٢ \times ٥٠ - ٨٠ \times س$$

$$\therefore س = ٧,٥$$

$$\therefore \text{البعد بين القوتين} = ١٢ - ٧,٥ = ٤,٥ \text{ سم}$$

٢١ د

٢٢ د

الحل

$$\therefore \text{القوى متزنة} \therefore \text{ع} = \text{ع} = \text{ع} = \text{ع} = \text{صفر}$$

$$\therefore (١)، (ب)، (ح) \text{ صحيحة}$$

٢٣ ب

الحل

$$س = \frac{١٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٢٠}{٢٠ + ٢٠ + ٢٠}$$

$$\frac{٥٨}{٢٥} = \frac{٤ \times ١٢ + ٠ \times ٨ + ٢ \times ٥}{١٢ + ٨ + ٥}$$

$$ص = \frac{١٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٢٠}{٢٠ + ٢٠ + ٢٠}$$

$$\frac{٢}{٢٥} = \frac{١ - ١٢ + ٢ \times ٨ + ٢ - ٥}{١٢ + ٨ + ٥}$$

$$\therefore \text{نقطة تأثير محصلة القوى} = (\frac{٢}{٢٥}, \frac{٥٨}{٢٥})$$

٢٤ ج

الحل

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

$$\therefore \frac{١٥}{٢} = \frac{٢٩}{١٣}$$

وبفرض أن مقدار القوة التي تضاف للمجموعة هي ٢

$$\therefore ٢ = \frac{٢٤ + ٢٤}{١٢}$$

$$\therefore ١٢ = ٢ \text{ نيوتن وتؤثر في اتجاه } \overrightarrow{AB}$$

٢٥ ج

الحل

بفرض طول القضيب = ٢ ل

$$\therefore \text{ع} = ٢ \times ل$$

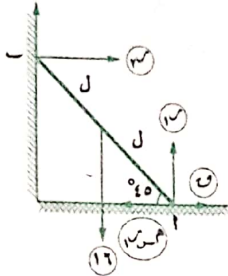
$$\text{ع} = ٢ \times ٢٠ = ٢٠ \times ل = ٢ \times \frac{١}{٣} \times ل = ٢ \times ل$$

$$\therefore \text{ع} = ٢ \text{ ع}$$

٥ (ج)

٦ (أ)

الحل



$$١٦ = ١٦$$

$$١٦ = ١٦ + ١٦$$

$$١٦ \times \frac{٢}{٤} = ١٦ + ١٦$$

$$١٦ \times \frac{٢}{٤} = ١٦ + ١٦$$

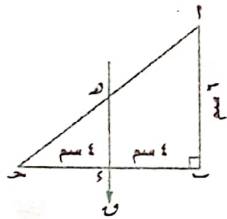
$$١٢ = \text{ث.كجم}$$

$$٠ = ١٦ \times \text{ث.كجم} \times ٤٥^\circ - ١٦ \times \text{ث.كجم} \times ٤٥^\circ$$

$$٠ = ١٦ \times \text{ث.كجم} \times ٤٥^\circ - ١٦ \times \text{ث.كجم} \times ٤٥^\circ$$

٧ (ب)

الحل



$$٢ = ٢$$

$$\text{خط عمل } ٢ // \text{خط عمل } ٤$$

$$٢ = ٢$$

$$\text{خط عمل } ٢ \text{ ينصف } ٤$$

$$٦٠ = ٤ \times ٢ = ٢٠ \text{ نيوتن}$$

٨ (أ)

الحل

$$\text{خط عمل } ٢ = \text{خط عمل } ٤$$

$$٢ = ٢$$

$$٢ = ٢$$

$$٢ = ٢$$

$$(٢, ٢, ٢) = (٢, ٢, ٢)$$

٩ (أ)

الحل

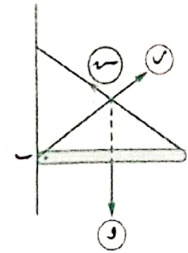
$$٢٠ \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٠$$

$$(٢٠ + ٢٠) \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٠$$

$$٢٦٧٠, ٦٢ = ٢٦٧٠, ٦٢$$

٢٠ (أ)

الحل



النموذج الثالث

١ (أ)

الحل

الجسم على وشك الحركة

$$٢٠ = ٢٠$$

$$١٢ \times ٢٠ = ٢٠$$

$$\frac{٢٠}{٣} = ٢٠$$

$$\frac{٢٠}{٣} = ٢٠$$

$$٢٠ = ٢٠$$

٢ (ج)

$$(٢, ٢, ٢) \times (٠, ١, ٤) = ٢$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٢$$

$$١١ = ١١$$

٢ (أ)

الحل

المركز الهندسي للمثلث هو مركز ثقل الصفيحة

$$١ = \frac{٢ + (١) + ١}{٣}$$

$$١ = \frac{١ + ٢}{٣}$$

$$(١, ١) = (١, ١)$$

٤ (أ)

الحل

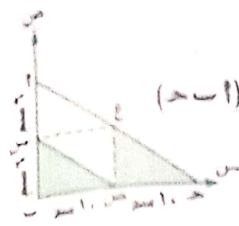
$$١٠ \times ٧ = (١٠ - ٥) \times ١٠$$

$$١٠ = ١٠$$

$$١٧ = ١٧$$

$$٢٠ = ٢٠$$





مساحة Δ (حـ ص ع) . مساحة Δ (أ ب ح) = ١ : ٤

بفرض أن كتلة Δ حـ ص ع = ك
كتلة Δ أ ب ح = ٤ ك

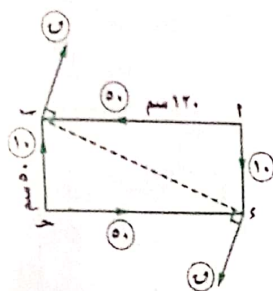
ك	٤ ك	ك	ك - ٤
س	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{40}{3}$
ص	٤	٢	٢

$$\frac{20}{3} = \frac{\frac{40}{3} \times ك - \frac{10}{3} \times ك + \frac{20}{3} \times ك}{٤ ك - ك + ك} = س$$

$$٤ = \frac{٢ \times ك - ٢ \times ك + ٤ \times ك}{٤ ك - ك + ك} = ص$$

$$\frac{24}{25} = \frac{20}{3} \div ٤ = ط$$

١٦ الحل



القوتان (١٠ ، ١٠) تكونان

ازدواجاً عزمه ج

$$ج ، ١٢٠ \times ١٠ =$$

$$= ١٢٠٠ \text{ نيوتن سم}$$

والقوتان (٥٠ ، ٥٠)

تكونان ازدواجاً عزمه ج

$$ج ، ٥٠ \times ٥٠ = ٢٥٠٠ \text{ نيوتن سم}$$

$$س = \sqrt{(١٢٠٠)^2 + (٢٥٠٠)^2} = ٢٨٠٠ \text{ سم}$$

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً عزمه ج

$$ج ، ١٢٠ \times ٥ = ٦٠٠ \text{ نيوتن سم}$$

$$في حالة الاتزان ج = ١٢٠٠ - ٢٥٠٠ + ٦٠٠ = ١٢٠$$

$$١٠ = ٥$$

١٧ الحل

$$\vec{و} - \vec{أ} = \vec{ق} = (١ ، -١)$$

$$\vec{و} - \vec{ب} = \vec{ق} = (٣ ، -٢)$$

$$\vec{و} - \vec{ح} = \vec{ق} = (١ ، ٠)$$

$$\vec{ق} = \vec{و} \times \vec{أ} + \vec{و} \times \vec{ب} + \vec{و} \times \vec{ح}$$

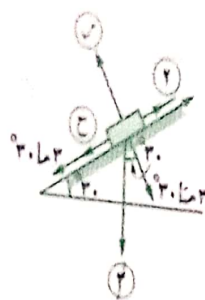
$$(٣ ، -١) \times (٣ ، -٢) + (٤ ، -٢) \times (١ ، -١) + (٧ ، -٢) \times (١ ، ٠) =$$

$$\vec{ق} = \vec{ق} + \vec{ق} + \vec{ق} = ٨$$

المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ٨ وحدة عزم.



١٥ الحل



$$١٠٠ = ٢٠ \times ٥$$

$$١٠٠ < ٢٠٠$$

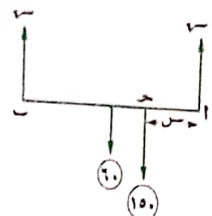
ج تعمل في اتجاه خط

أكبر ميل لأسفل.

$$١٠٠ = ٢٠٠ + ج$$

$$١٠٠ = ٢٠٠ + ج$$

١١ الحل



$$٦٠ + ١٥٠ = س$$

$$٧٠ = س$$

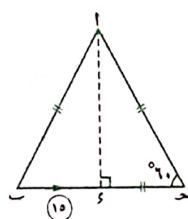
$$٠ = ج$$

$$٠ = ١٨٠ \times س - ٩٠ \times ٦٠ + س \times ١٥٠$$

$$٠ = ١٨٠ \times ٧٠ - ٥٤٠٠ + س$$

$$س = ٤٨$$

١٢ الحل



$$٣٢٤ = ٩٠ \times ٨$$

$$٣٢٤ \times ١٥ = ج$$

$$٣٢٤٠ = ج$$

$$٣٢٤٠ = ٦٠ \times ج$$

١٣ الحل

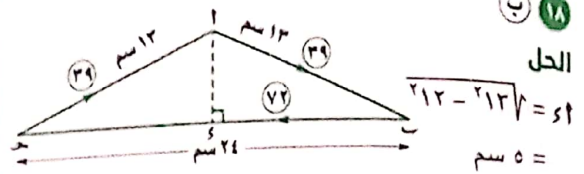
الكتلة	ك	٥ ك	٤ ك
س	١	٠	٢
ص	٠	٢	٤

$$\frac{١٢}{١٠} = \frac{٣ \times ك + ٠ \times ٥ ك + ١ \times ٤ ك}{ك + ٥ ك + ٤ ك} = س$$

$$\frac{١٢}{٥} = \frac{٤ \times ك + ٢ \times ٥ ك + ٠ \times ٤ ك}{ك + ٥ ك + ٤ ك} = ص$$

$$\left(\frac{١٢}{٥} ، \frac{١٢}{١٠} \right) = \text{مركز الثقل}$$

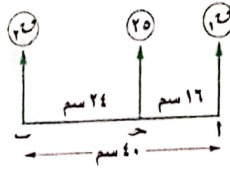
١٨ ب



الحل

∴ القوى في اتجاه دورى واحد ،
∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً مقداره
 $2 \times \text{مساحة } \Delta \text{ ب ح ا} = 2 \times 5 \times 24 \times \frac{1}{2} = 120$
 $360 = 2 \times 5 \times 24 \times \frac{1}{2} = 360$ نيوتن.سم

١٩ ج



الحل

$16 \times 25 = 40 \times 10 = 400$
∴ 10 = ث.جم

٢٠ ا

عند التعليق من نقطة ح يكون ح رأسياً لأنه خط تماثل للشكل الهندسى

∴ س ز // ح

فإن س ز أيضاً يكون رأسياً.

النموذج الرابع

١ ب

الحل

∴ قوة الاحتكاك النهائى = ح = 1 × 3 = 3 نيوتن

∴ الجسم تحت تأثير قوة أفقية تحاول تحريكه

∴ $3 \geq 0$ ∴ ح = 3

∴ $2 \geq 0$ ∴ ح = 2

∴ $3 + 2 \geq 3 + 2$ ∴ ح = 3

∴ $4 \geq 1$ ∴ ح = 4

∴ $2 \geq 1$ ∴ ح = 2

∴ $[2, 1] \ni 2$

٢ ب

٢ ج

٤ ب

١٩ ا

الحل

$16 \times 25 = 40 \times 10 = 400$
∴ 10 = ث.جم

٢٠ ا

٢١ ج

الحل

حس = $(90^\circ - \theta)$

٢٢ ب

الحل

مركز ثقل الجزء المتبقى يقع على محور تماثل الشكل
∴ مركز ثقل الجزء المتبقى يقع على المماس المشترك الداخلى بين الدائرتين الصغيرتين.

٢٣ ب

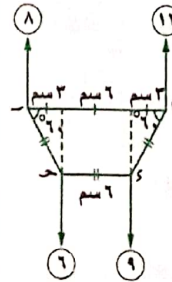
٢٤ ب

٢٥ ج

٢٦ ا

٢٧ ب

الحل



∴ ح = 6

5 نيوتن لأعلى وتؤثر فى نقطة تبعد عن ا بمقدار 3 سم

∴ مجموع عزوم القوى حول ا

= عزم المحصلة حول ا

∴ $12 \times 8 - 9 \times 6 + 3 \times 9 = 0$

∴ س = 3 سم



① ٥
الحل

الكتلة	٤	٥	٣
س	٠	١٢	٦
ص	٠	٠	٣٦

$$٦ \frac{١}{٣} = \frac{٦ \times ٣ + ١٢ \times ٥}{٣ + ٥ + ٤} = م$$

$$٣٦ \frac{٢}{٣} = \frac{٣٦ \times ٦ \times ٢}{٣ + ٥ + ٤} = ص،$$

$$مركز الثقل = (٣٦ \frac{٢}{٣}, ٦ \frac{١}{٣})$$

① ٦
الحل

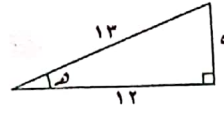
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = \vec{r}_5 - \vec{r}_6$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = \vec{r}_5 - \vec{r}_6$$

$$طول العمود = \frac{||\vec{r}||}{||\vec{u}||} = \frac{11}{\sqrt{14+12}} = ٢,٢$$

② ٧
الحل

∴ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط
م = طاه = $\frac{٥}{١٢}$



② ٨
الحل

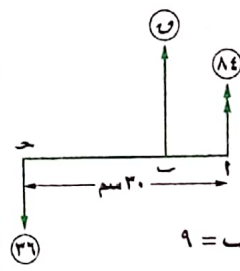
$$١٢٠ = ٣٦ + ٨٤ = نيوتن.$$

$$ج = ٠$$

$$٠ = ٣٠ \times ٣٦ - ١ \times ١٢٠$$

$$٩ = ١ \times ١٢٠ - ١٠ \times ٨٠ \therefore ٩ = ١$$

$$\therefore س = ٩ - ٣٠ = ٢١ سم$$



① ٩
الحل

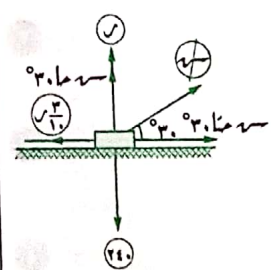
∴ الجسم على وشك الحركة.

$$س = ٣٠ \times \frac{٢}{١} = ٦٠$$

$$\therefore س = \frac{١}{٣} \times \frac{٣٦}{٢} = ٦$$

$$\therefore س = \frac{٣٦ \times ٥}{٢} = ٩٠$$

$$٢٤٠ = ٣٠ + س$$



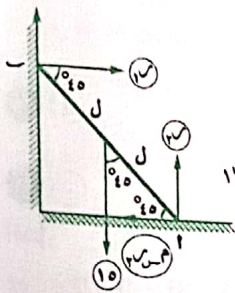
$$٢٤٠ = س + \frac{١}{٣} \therefore س = ٢٤٠ - \frac{١}{٣}$$

$$٢٤٠ = س \left(\frac{١}{٣} + \frac{٣٦ \times ٥}{٢} \right) \therefore س = \frac{(٢ + ٣٦ \times ٥)}{٦} \therefore س = ٧٠,٨٦ \text{ ث.كجم}$$

① ١٥
الحل

$$ج = ١٤ \times ٧ - ٥ \times ٨ = ١٢٨ - ٤٠ = ٨٨ \text{ نيوتن.سم}$$

② ١١
الحل



$$١٠ = م$$

$$١٠ = م$$

$$\therefore م = ٧,٥ \text{ ث.كجم}$$

② ١٢
الحل

$$(٢, ٢) = \left(\frac{٠ + ٠ + ٩}{٣}, \frac{٠ + ٠ + ٩}{٣} \right) = م$$

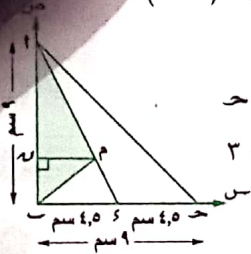
$$\therefore م = ٣ سم$$

مساحة Δ م = مساحة Δ أ ب ح

$$٣ : ١ = ٩ \times ٩ \times \frac{١}{٣} : ٣ \times ٩ \times \frac{١}{٣} =$$

بفرض أن كتلة Δ م = ك

$$\text{كتلة } \Delta \text{ أ ب ح} = ٢ ك$$



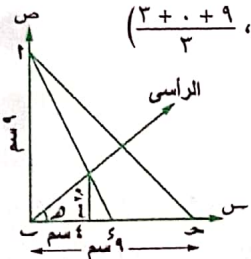
$$مركز ثقل \Delta م = \left(\frac{٢ + ٠ + ٩}{٣}, \frac{٢ + ٠ + ٠}{٣} \right) = (٤, ١)$$

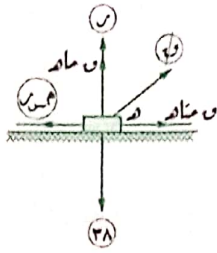
الكتلة	٤ - ك	٢ ك
س	١	٣
ص	٤	٢

$$\therefore م = \frac{٢ \times ٢ ك + ١ \times ٤ - ك - ٢ ك}{٤ - ٢ ك} = ٤$$

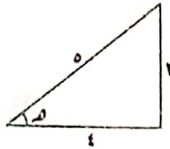
$$ص = \frac{٢ \times ٢ ك + ٤ \times ٤ - ك - ٢ ك}{٤ - ٢ ك} = ٢,٥$$

$$طاه = \frac{٢,٥}{٤} = \frac{٥}{٨}$$





$\therefore م = \frac{1}{4}$
 • على المستوى الأفقي :
 $س + و = ح$
 $28 = و + س$
 $\therefore 28 = و + \frac{2}{5} و$
 $و = 20$
 $\therefore م = 5$
 $\therefore \frac{1}{4} = و$
 $\therefore و = 16$
 بالتعويض من (2) في (1) :
 $28 = و + \frac{2}{5} و$
 $\therefore و = 10$ ث.كجم



١٧ ب

الحل

من هندسة الشكل :

$(0, 8, 6) = ع$ ، $(10, 0, 0) = س$
 $\therefore (10, 8, 6) = س - ع$
 $\therefore و = س - ع$
 $\therefore و = \frac{(10, 8, 6)}{\sqrt{(10)^2 + (8)^2 + (6)^2}} \times \sqrt{20} = \frac{(10, 8, 6)}{\sqrt{200}} \times \sqrt{20}$
 $(20, 16, 12) = و$
 $\therefore و \times س = و \cdot س$

$\therefore و \times س = و \cdot س$
 $\therefore و \times س = و \cdot س$

١٨ ب

الحل

القوتان (10 ، 10) تكونان

ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$ع = 3 \times 10$

20 نيوتن. سم

والقوتان (10 ، 10)

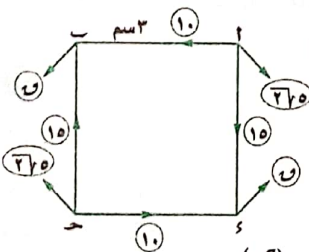
تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$ع = 3 \times 10 = 30$ نيوتن. سم

$\therefore و = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ سم

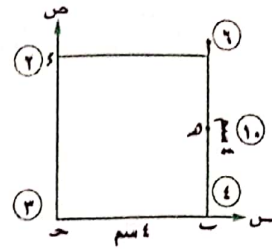
القوتان (20 ، 20)

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)



١٢ د

الحل



نختار الاتجاهين المتعامدين حـ س ، حـ ص

حـ	سـ	عـ	وـ	طـ	زـ
2	4	6	2	10	4
0	4	4	0	2	4
0	0	4	4	2	4

$س = \frac{4 \times 10 + 0 \times 2 + 4 \times 6 + 4 \times 4 + 0 \times 2}{10 + 2 + 6 + 4 + 2} = 2,2$

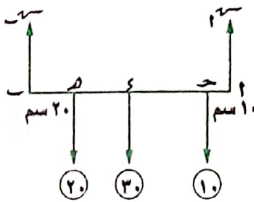
$ص = \frac{2 \times 10 + 4 \times 2 + 4 \times 6 + 0 \times 4 + 0 \times 2}{10 + 2 + 6 + 4 + 2} = 2,08$

أي أ هـ : مركز الثقل يبعد عن نقطة حـ مسافة

$\therefore \sqrt{(2,08)^2 + (2,2)^2} = \frac{5,69 \sqrt{4}}{20}$ سم

١٤ د

الحل



$س + ص = 60$

$ع = 0$

$20 \times 20 + 50 \times 10$

$0 = 60 \times س - 20 \times 20 +$

$\therefore س = 20$ نيوتن. ، $ص = 20$ نيوتن.

$\therefore س - ص = 0$

١٥ ب

الحل

القضيب متزن

$20 \times 6 = 40 \times 2$

$\therefore و = 24$ نيوتن.

١٦ د

الحل

الجسم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع

على مستوى مائل خشن يميل بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$



$$\begin{aligned} 1 \text{ سم} &= 1 \text{ سم} = \frac{\theta}{\frac{\theta}{\frac{1}{2}} \text{ م}} = \frac{\theta}{\frac{1}{2} \text{ م}} \\ 1 \text{ سم} &= 1 \text{ سم} = \frac{\theta}{\frac{\theta}{\frac{1}{2}} \text{ م}} = \frac{\theta}{\frac{1}{2} \text{ م}} \\ 0.9 &= \frac{\theta}{\frac{\theta}{\frac{1}{2}} \text{ م}} \\ 0.9 &= \frac{\theta}{\frac{\theta}{\frac{1}{2}} \text{ م}} \\ 0.9 &= \frac{\theta}{\frac{\theta}{\frac{1}{2}} \text{ م}} \end{aligned}$$

٢٣ ب

$$\begin{aligned} \therefore \text{ع} &= \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} = 4 \text{ سم في اتجاه جميع القوى} \\ \therefore \text{مجموع عزوم القوى حول أ} &= \text{عزم المحصلة حول أ} \\ \therefore 6 \times \text{ع} - 10 \times \text{ع} + 4 \times \text{ع} &= 0 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 10 \times \text{ع} - 4 \times \text{ع} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 6 \times \text{ع} \\ \therefore \text{ع} &= 1 \text{ سم} \end{aligned}$$

٢٤ ا

$$\begin{aligned} \therefore \text{المجموعة متزنة} \\ \therefore \text{ع} &= 0 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

٢٥ ب

$$\begin{aligned} \therefore \text{ع} &= 1 \text{ سم} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

٢٦ ج

$$\begin{aligned} \therefore \text{محصلة القوتين (و، و) هي (٢ و) وتؤثر في النقطة (ح)} \\ \therefore \text{الشدة يؤثر أيضاً في النقطة (ح)} \\ \therefore \text{لا بد وأن يؤثر رد فعل المفصل في (ح)} \\ \therefore \text{اتجاه رد فعل المفصل هو ح} \end{aligned}$$

٢٧ ا

$$\begin{aligned} \therefore \text{مقدار المحصلة سوف يتضاعف ولكن النسبة بين و، و، و} \\ \text{تظل ثابتة وبالتالي لا تتغير نقطة تأثير المحصلة} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ع} &= 1 \text{ سم} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ع} &= 1 \text{ سم} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

١٩ ج

٢٥ د

الحل

$$\begin{aligned} \text{بالنسبة للجسم الذي وزنه (و)} \\ \text{ع} = \text{م} = 1 \text{ سم} \\ \text{بالنسبة للجسم الذي وزنه (و + ٢)} \\ \text{ع} = \text{م} = 1 \text{ سم} \\ \text{وبالتعويض من (١) في (٢):} \\ \text{ع} = 1 \text{ سم} \end{aligned}$$

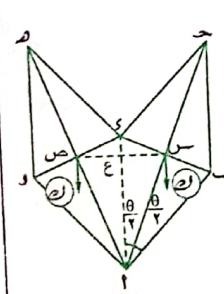
٢١ ج

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ع} &= 1 \text{ سم} \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 8 \times 12 \\ \therefore 6 \times \text{ع} &= 96 \\ \therefore \text{ع} &= 16 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

٢٢ ب

الحل



$$\begin{aligned} \text{بفرض كتلة المعين} \\ \text{أ ب ح د} = \text{كتلة المعين} \\ \text{و من تماثل الشكل} \\ \text{نجد أن مركز ثقل الشكل} \\ \text{يقع عند (ع) حيث} \\ \text{ع} = 10 \text{ م} \end{aligned}$$

٢٨

الحل



$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

٢٩

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

٣٠

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

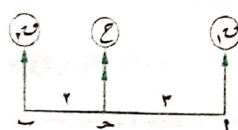
٣١

الحل

$$\therefore 24 \times 60 = 24 \times 20$$

٣٢

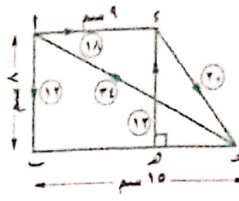
الحل



$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

٣٣

الحل



$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

٣٤

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

النموذج الخامس

٣٥

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \\ \therefore 24 \times 60 &= 24 \times 20 \end{aligned}$$

ومركزه $(12, 20) = \left(\frac{18+18+0}{3}, \frac{12+24+24}{3} \right)$

ل	٤٣٢	١٠.٨-
س	١٢	٢٠.
ص	٩	١٢

\therefore س $\frac{28}{3} = \frac{20 \times 10.8 - 12 \times 432}{10.8 - 432}$

ص $8 = \frac{12 \times 10.8 - 9 \times 432}{10.8 - 432}$

\therefore طاه $\frac{8}{7} = \frac{8}{\left(\frac{28}{3}\right)}$

١٢

١٢

الحل

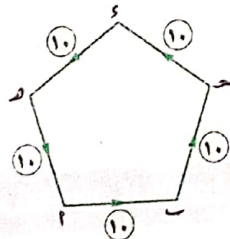
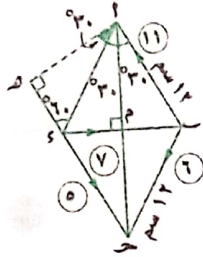
من هندسة الشكل :

م ٢ = ٣٢٦ سم ، م ١ = ٣٢٦ سم

ج $326 \times 0 + 326 \times 7 =$

$326 \times 6 -$

$326 = 326$ نيوتن سم.



\therefore القوى في اتجاه دورى واحد

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$2 \times \text{مساحة الخماسى} \times \frac{2}{3} =$

$\frac{2}{3} \times \left(\frac{180}{5} \right) \times (10) \times \frac{5}{4} \times 2 =$

$= 16,14$ ث.كجم سم

\therefore معيار عزم الازدواج $= 16,14$ ث.كجم سم

١

الحل

$8 = \frac{24}{3}$ نيوتن.

٩

الحل

$2 = 2 + 2$

$\therefore 2 = 2$

$\therefore 0 =$

$\therefore 0 = 100 \times 0 - 0 \times 0$

$0 = 100 \times 2 +$

$0 = 200 + 0 + 0 + 0$

$\therefore 0 = 200 + 0 + 0 + 0$

(٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore 0 = 200 + 0 + 0 + 0$

$\therefore 0 = 200 + 0 + 0 + 0$

يطلق الثقل (٥) على بعد ٢٠ سم من أحد الطرفين حتى يكون الشد ناحيته ضعف مقداره فى الخيط الآخر.

١٠

الحل

نفرض أن طول القضيب ٢ ل ووزنه و

$1 = 1$ ، $1 = 1$

$\therefore 1 = 1$

$\therefore 1 = 1$

ج $0 = 0$: $\therefore 0 = 0$: $\therefore 0 = 0$

$\therefore 0 = 0$: $\therefore 0 = 0$

$\therefore 0 = 0$: $\therefore 0 = 0$

١١

الحل

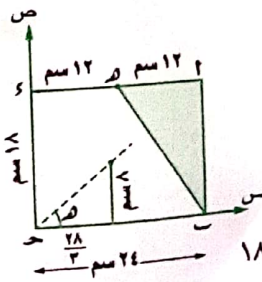
مساحة المستطيل $18 \times 24 =$

432 سم

ومركزه (٩، ١٢)

مساحة المثلث $18 \times 12 \times \frac{1}{2} =$

108 سم



بفرض أن كتلة الدائرة م = ٩ ك

بفرض أن كتلة الدائرة م = ٩ ك

، باختيار الاتجاهين المتعاضدين و س ، و ص

الكتلة	ك ٩	ك -
س	٢٠	٥٠
ص	٠	٠

$$\therefore \text{س} = \frac{٥٠ \times \text{ك} - ٢٠ \times \text{ك} ٩}{\text{ك} - \text{ك} ٩} = ٢٧,٥$$

$$\text{ص} = \frac{٠ \times \text{ك} - ٠ \times \text{ك} ٩}{\text{ك} - \text{ك} ٩} = ٠$$

∴ مركز الثقل = (٠ ، ٢٧,٥)

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى على بُعد ٢,٥ سم من مركز ثقل

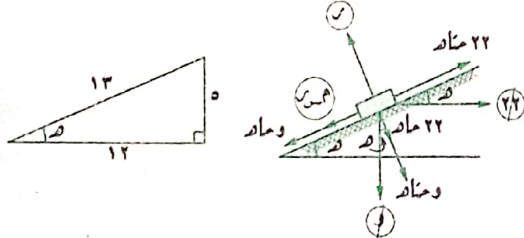
١٨ ج

الحل

$$\text{ج} = ١٠٠ \times ٤ \times ٤٥^\circ = ٢٧٢٠٠ \text{ نيوتن.متر.}$$

١٩ ا

الحل



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى.

$$\therefore \text{س} = ٢٢ \text{ حاه} + \text{و حاه}$$

$$\therefore \text{س} = ٢٢ \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times ٢٢ \quad (١)$$

$$٢٢ \text{ حاه} = \text{م} - \text{س} + \text{و حاه}$$

وبالتعويض من (١) :

$$\therefore \frac{٥}{١٣} \times \text{و} + \left(\frac{١٢}{١٣} + \frac{١١}{١٣} \right) \times \frac{١}{٢} = \frac{١٢}{١٣} \times ٢٢$$

(بالضرب ١٣)

$$\therefore ٥ + ١١ = ٢٠,٩$$

$$\therefore ٥٥ + ٦ + ٥ = ٦٦$$

$$\therefore \text{و} = ١٩ \text{ نيوتن.}$$

١٥ ب

الحل

∴ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

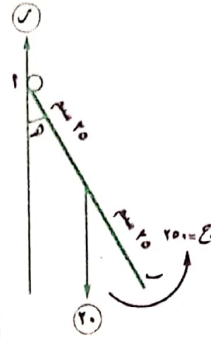
∴ القوتان (٢٠ ، س) تكونان

ازدواجًا قياسه الجبرى = - ٢٥٠

$$\therefore - ٢٥٠ = - ٢٥ \times ٢٠ \times \text{حاه}$$

$$\text{حاه} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ح} = \text{حاه}^{-١} = \left(\frac{١}{٢} \right)^{-١} = ٢٠, ١٥٠$$



١٦ ج

الحل

بفرض أن وزن القضيب و ث.كجم

ويؤثر فى نقطة م حيث ح = م = س

* عند تعليق الثقل ٦ ث.كجم عند ٩ :

∴ القضيب على وشك الدوران حول ح

$$\therefore \text{س} = \text{صفر}$$

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث مقادير هى ١، ٩، ٦ ث.كجم

$$\therefore ١٠ \times ٩ = \text{س} \times ٦$$

$$\therefore \text{و} = \text{س} = ٦٠$$

(١)

* عند تعليق الثقل ٩ ث.كجم عند ب :

∴ القضيب على وشك الدوران حول ب

$$\therefore \text{س} = \text{صفر}$$

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

مقاديرها ١، ٩، ٦ ث.كجم

$$\therefore ١٠ \times ٩ = (\text{س} - ١٠) \times ٩$$

$$\therefore ١٠ - \text{و} = \text{و} = ٩٠$$

(٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) : ٩٠ = ٦٠ - ١٠ ∴ ٩٠ = ٥

وبالتعويض فى (١) : ١٥ = س = ٦٠

$$\therefore \text{س} = ٤ \text{ سم}$$

∴ بعد نقطة تأثير وزنه عن ٩ = ٤ + ١٠ = ١٤ سم

١٧ ج

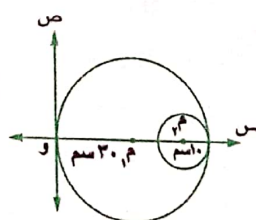
الحل

مساحة الدائرة م

مساحة الدائرة م

$$\pi (١٠)^٢ : \pi (٢٠)^٢ =$$

$$١ : ٩ =$$





٢١

الحل

∴ الاحتكاك نهائي
∴ معادلتا الاتزان هما :

$$\frac{1}{3} = \frac{27}{r}$$

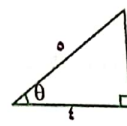
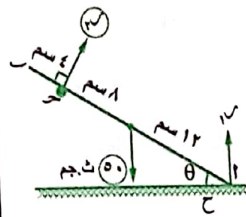
وبالتعويض من (٢) في (١) :

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{27}{r} \Rightarrow r = 27 \times \frac{1}{3} = 9 \text{ ث.كجم} = 9 \times 9.8 = 88.2 \text{ نيوتن.}$$

٢٢

١

الحل



∴ القضيبة متزن ∴

$$\therefore 20 \times r = 12 \times 50 \text{ م.ث.}$$

$$\therefore 20 \times r = 12 \times 50 \times \frac{4}{5}$$

$$r = 24 \text{ ث.كجم.}$$

٢٣

الحل

$$\frac{8}{3} = \frac{6}{1} \therefore$$

$$2 = 6 \therefore$$

$$\frac{8}{3} // \frac{6}{1} \therefore$$

$$8 = 6 \therefore$$

٢٤

الحل

$$\therefore (2, 1) = \frac{(0, 3, 0) + (4, 6)}{2 + 3}$$

$$\therefore (2, 1) = \frac{(0, 3, 0) + (4, 6)}{5}$$

$$= \left(\frac{0 + 22}{5}, \frac{0 + 20}{5} \right) =$$

$$2 = \frac{0 + 20}{5} \therefore$$

$$0 = 0 \therefore$$

٢٥

الحل

بفرض أن $a = b = c = d = s$ سم

$$\therefore s \times s = 10$$

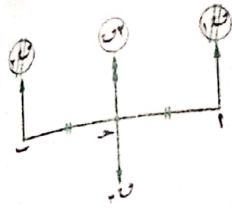
$$s \times s = 10 \text{ سم}^2, \therefore s = \sqrt{10} \text{ سم}$$

$$\therefore s = \sqrt{10} \text{ سم}$$

∴ جميع الاختيارات صحيحة ما عدا (٢)

٢٦

الحل



بفرض أن $u = v = w = x$

∴ محصلة (٢) هي (٢) و

وتؤثر في النقطة (ح)

، محصلة (٢) هي u وتؤثر في (ح)

بعد تحرك u في اتجاه حـ

مسافة s سوف تتحرك

المحصلة في اتجاه حـ مسافة s

∴ $s = 0$

$$\therefore u \times 2 = (s + u) \times 2$$

$$\therefore s + u = 2$$

$$\therefore s = 0$$

∴ المحصلة تتحرك في اتجاه حـ مسافة s

٢٧

الحل

$$\therefore s \times 2 = u \times 2$$

$$s \times 2 = u \times 2$$

$$\therefore \frac{s}{2} = \frac{u}{2}$$

$$\therefore s = u$$

٢٨

الحل

∴ نقطة تأثير القوى L ، L

، L ، L هي على الترتيب

$$(8, 2), (2, 1), (0, 0), (2, 1), (8, 2)$$

$$\therefore s = \frac{2 \times 8 + 1 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 8}{2 + 1 + 0 + 1 + 2}$$

صفر =

$$s = \frac{8 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 2 + 8 \times 2}{2 + 1 + 0 + 1 + 2}$$

$$\therefore (2, 0, 0) = \text{مركز الثقل}$$

٢٩

الحل

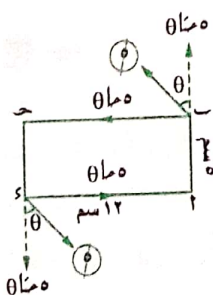
$$\therefore 12 \times 10 = 5 \times 10$$

$$60 = 5 \times 10$$

$$12 = 5 + 10$$

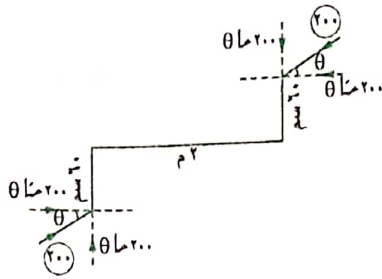
$$1 = 5 + 10$$

$$\therefore \frac{12}{13} = \frac{5}{13}$$



٦ ب

الحل



$$200 \times \theta \times 200 - 120 \times \theta \times 200 = 0$$

$$200 \times \frac{4}{5} \times 200 - 120 \times \frac{3}{5} \times 200 =$$

$$= 17600 \text{ نيوتن.سم} = 176 \text{ نيوتن.م}$$

∴ معيار عزم الازدواج = 176 نيوتن.م

٧ ج

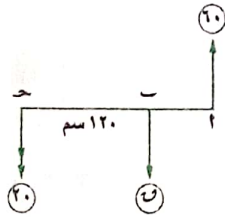
الحل

$$80 = 0.75 \div 60 = 7$$

$$\therefore 100 = \sqrt{(60)^2 + (80)^2} = \sqrt{10000} = 100 \text{ نيوتن}$$

٨ ا

الحل



$$\therefore 60 - 120 = 0$$

$$\therefore 60 - 120 = 20$$

$$120 = 80 \text{ ث.كجم}$$

$$\therefore 0 = 120 \times 60 + 120 \times 120 - 60 \times 120 = 0$$

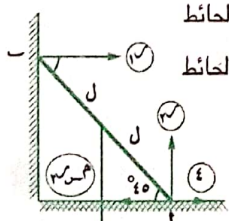
$$\therefore 0 = 120 \times 60 + 120 \times 80 - 60 \times 120 = 0$$

$$\therefore 160 = 120$$

$$\therefore \text{طول القضيب} = 120 - 160 = 40 \text{ سم}$$

٩ ب

الحل



(1)

(2)

∴ القضيب على وشك الحركة بعيداً عن الحائط

∴ قوة الاحتكاك النهائي تؤثر في اتجاه الحائط

معادلات الاتزان :

$$32 = 2 \text{ ث.كجم}$$

$$1 \text{ م} + 4 \text{ م} = 1 \text{ م}$$

$$\therefore 1 \text{ م} = 32 - 4 \text{ م}$$

$$\therefore 0 = 1 \text{ م}$$

$$\therefore 32 \times 2 \times \sin 45^\circ - 1 \times 2 \times \sin 45^\circ = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = 1$$

$$\therefore \sin \theta = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 1$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin \theta = 0$$

١٠ ج

الحل

$$\therefore \frac{4}{1} = \frac{36}{9} = \frac{\text{مساحة المربع الأكبر}}{\text{مساحة المربع الأصغر}}$$

∴ مركز ثقل المجموعة يقسم ٣٦ بنسبة ١ : ٤ من جهة م

النموذج السادس

١ ا

الحل

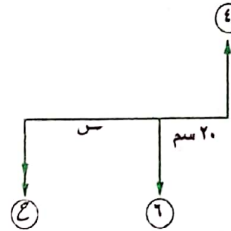
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

$$(2, 4) \times (1, 3) =$$

$$= (4 \times 1 - 2 \times 3) \vec{k} = -2 \vec{k}$$

٢ ب

الحل



$$4 = (20 + 40) \times 6$$

$$\therefore 2 = 80$$

$$\therefore 40 = 80 \text{ سم}$$

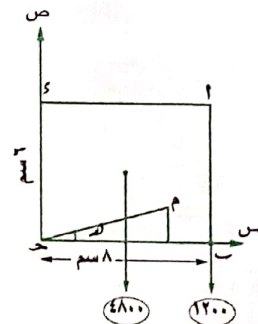
أي: المحصلة تبعد ٤٠ سم عن القوة الثانية

٣ ب

٤ ج

٥ ا

الحل



ل	٤٨٠٠	١٢٠٠
س	٤	٨
ص	٣	٠

$$\therefore \frac{8 \times 1200 + 4 \times 4800}{1200 + 4800} = 4.8 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{0 \times 1200 + 3 \times 4800}{1200 + 4800} = 2.4 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2.4}{4.8}$$



كتلة س ح = ٤ ك ، كتلة ح أ = ٥ ك

الكتلة	ك	٢ ك	٤ ك	٥ ك
س	١.٥	٠	١.٥	٠
ص	٢	٢	٠	٢

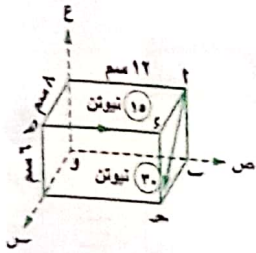
$$\therefore \text{س} = \frac{1.5 \times ٤ + 1.5 \times ٥}{٤ + ٥ + ٢} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{٢ \times ٥ + ٢ \times ٤}{٤ + ٥ + ٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

١٢ ل

الحل

من هندسة الشكل :



$$\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ك}$$

$$(٦, ١٢, ٨) =$$

$$(٦, ٠, ٨) -$$

$$(٠, ١٢, ٠) =$$

$$\therefore \overrightarrow{ك} = \frac{\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}}{\|\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}\|} \times ١٥ =$$

$$\frac{(٠, ١٢, ٠)}{\sqrt{(٠)^2 + (١٢)^2 + (٠)^2}} \times ١٥ =$$

$$(٠, ١٥, ٠) =$$

$$\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{أ} - (٠, ١٢, ٨) = (٦, ١٢, ٠) - (٠, ١٢, ٨) =$$

$$(٦, ٠, ٨) =$$

$$\therefore \overrightarrow{أ} = \frac{\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ح}}{\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ح}\|} \times ٢٠ =$$

$$\frac{(٦, ٠, ٨)}{\sqrt{(٦)^2 + (٠)^2 + (٨)^2}} \times ٢٠ =$$

$$(١٨, ٠, ٢٤) =$$

$$\therefore \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} + \overrightarrow{و} \times ١٠ = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} \times ١٠$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ك} \\ ٦ & ١٢ & ٠ \\ ١٨ & ٠ & ٢٤ \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ك} \\ ٦ & ٠ & ٨ \\ ٠ & ١٥ & ٠ \end{vmatrix} +$$

$$= -٢١٦ \overrightarrow{س} + ١٤٤ \overrightarrow{ص} - ٢٨٨ \overrightarrow{ك}$$

$$= ٩٠ \overrightarrow{س} + ١٢٠ \overrightarrow{ص} - ١٦٨ \overrightarrow{ك}$$

$$= ٣٠٦ \overrightarrow{س} + ١٤٤ \overrightarrow{ص} - ١٦٨ \overrightarrow{ك}$$

١٥ ل

بالتعويض من (١) في (٢) :

$$\therefore ٢٢ = \left(\frac{١}{٢١}\right) \times ٢٢ - (٢٢ \text{ م} - ٤) \times \left(\frac{١}{٢١}\right) =$$

$$\therefore ٢٢ - ٦٤ \text{ م} = ٨ =$$

$$\therefore \frac{٥}{٨} = \text{م} =$$

١٦ ب

الحل

القوى الموضحة بالشكل في اتجاه دورى واحد :

$$١,٥ = \frac{١٥}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} =$$

المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه

$$= ٢ \times ١,٥ \times \frac{١}{١٠} \times ١٠ \times ١٠ \times ٦٠ \text{ م} =$$

$$= ٧٥ \times ٢١ \text{ نيوتن سم}$$

١١ ا

الحل

$$\therefore \text{ع} = \text{ع} =$$

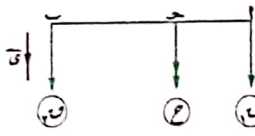
$$\therefore ٢٠ \text{ م} \times ١٠٠ \times ٥٠ = ٢٠ \text{ م} \times ١٠٠ \times ٥٠ =$$

$$\therefore \text{ع} = ٥٠ \times ٢١ \text{ نيوتن}$$

١٢ ل

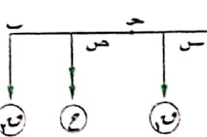
الحل

قبل التحرك :



$$\text{ع} \times ١ = \text{ع} \times ٢ + \text{ع} \times ٣ \quad (١)$$

بعد التحرك :



$$\text{ع} (١ - \text{ح} - \text{س} + \text{ص}) =$$

$$\text{ع} (\text{ح} - \text{س} + \text{ص}) =$$

$$\therefore \text{ع} (١ - \text{ح} - \text{س} + \text{ص}) = \text{ع} (\text{ح} - \text{س} + \text{ص}) \quad (٢)$$

بالتعويض من (١) في (٢) :

$$\therefore -\text{ع} + \text{ع} \text{ س} + \text{ع} \text{ ص} = -\text{ع} + \text{ع} \text{ س} + \text{ع} \text{ ص}$$

$$\therefore (\text{ع} + \text{ع} \text{ س}) = \text{ع} \text{ س}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١}{١ + \text{س}}$$

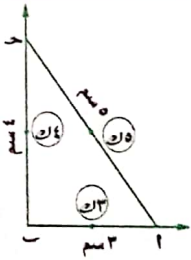
١٣ ا

الحل

$$\text{أ} : \text{ب} : \text{ح} =$$

$$= ٢ : ٤ : ٥$$

بفرض أن كتلة أ = ٣ ك



١٦

الحل

في حالة ان الجسم على وشك
الحركة لأعلى يكون الاحتكاك
النهائي لأسفل ، $Q = 10$
معادلات الاتزان :

$$Q = 20 \text{ مانه}$$

$$Q = 20 \text{ مانه} + 4 \text{ مانه}$$

بالتعويض من (١) في (٢) :

$$10 = 20 \text{ مانه} + 4 \text{ مانه} \times (20 \text{ مانه})$$

* في حالة الجسم على وشك

الحركة لأسفل يكون الاحتكاك

النهائي لأعلى ، $Q = 10$

معادلتا الاتزان :

$$Q = 20 \text{ مانه}$$

$$4 \text{ مانه} + Q = 20 \text{ مانه}$$

بالتعويض من (٤) في (٥) :

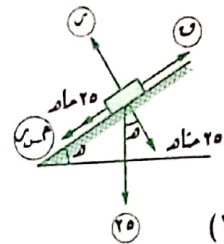
$$4 \text{ مانه} = 10 + (20 \text{ مانه})$$

بجمع (٢) ، (٦) :

$$20 + 20 \text{ مانه} = 20 \text{ مانه} + 50 \text{ مانه}$$

$$20 = 30 \text{ مانه}$$

∴ المستوى يميل على الافقى بزاوية قياسها 30°



$$(1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

$$(7)$$

$$(8)$$

$$(9)$$

$$(10)$$

$$(11)$$

$$(12)$$

$$(13)$$

$$(14)$$

$$(15)$$

$$(16)$$

$$(17)$$

$$(18)$$

$$(19)$$

$$(20)$$

$$(21)$$

$$(22)$$

$$(23)$$

$$(24)$$

$$(25)$$

$$(26)$$

$$(27)$$

$$(28)$$

$$(29)$$

$$(30)$$

$$(31)$$

$$(32)$$

$$(33)$$

$$(34)$$

$$(35)$$

$$(36)$$

$$(37)$$

١٧

الحل

القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين ج ، ج ، ج

∴ القوتان (س ، ٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج ، ١)

$$∴ ٢ = ٣ \text{ ث.كجم}$$

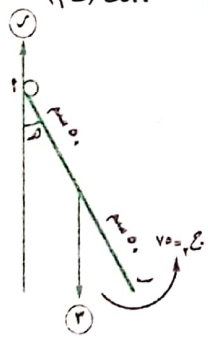
$$٧٥ = ٢ \times ٥٠ \times ٣ - ٢ \times ٥٠ \times ٣$$

$$٧٥ = ٢ \times ٥٠ \times ٣ - ٢ \times ٥٠ \times ٣$$

$$٧٥ = ٢ \times ٥٠ \times ٣ - ٢ \times ٥٠ \times ٣$$

$$∴ ١ = ٣$$

$$∴ ٢٠ = ١٥٠$$



١٨

الحل

في المثلث أ ب س :

$$٢١٢ + ٢٩ = ١٥$$

$$١٥ = ١٥$$

∴ القوى (٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥) تعمل فى اتجاه دورى واحد

$$٣ = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٢٧}{٩}$$

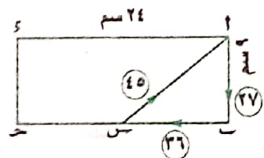
∴ القوى (٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥) تكون ازدواجاً قياسه الجبرى (ج ، ١)

$$٢ \times ٩ \times ١٢ \times \frac{١}{٣} = ٢٢٤$$

$$٢ \times ٩ \times ١٢ \times \frac{١}{٣} = ٢٢٤$$

$$٢٢٤ = ٢٢٤$$

∴ معيار عزم الازدواج = ٢٢٤ نيوتن سم



١٩

الحل

∴ الجسم على وشك الحركة

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

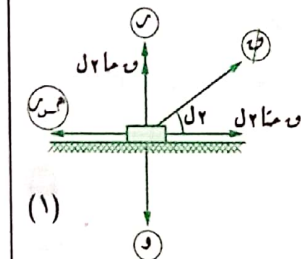
$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$

$$∴ ٢٢ ل = ٢٢ م$$



$$(1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

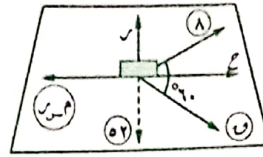
$$(5)$$

$$(6)$$



١٥

الحل



$$\vec{C} = 74 + \vec{U}$$

$$60^\circ \times 8 \times 2 + 74 + \vec{U} =$$

$$\therefore \text{مس } = 52 \times \frac{1}{2} = 13 \text{ نيوتن}$$

الجسم على وشك الحركة $\therefore \vec{C} = \text{مس}$

$$\therefore \vec{C} = 13$$

$$169 = 74 + \vec{U} + 8 + \vec{U}$$

$$\therefore \vec{U} + 8 + 10.5 = 169$$

$$\therefore \vec{U} = 10.5 - 8 = 2.5$$

$$\therefore \vec{U} = 7 \text{ (مرفوض)}$$

$$\therefore \vec{U} = 7 \text{ نيوتن}$$

١٦

الحل

$$\vec{r} = (2, 2, 4)$$

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4-8) - \vec{j}(4-4) + \vec{k}(4-2) = -4\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$= (-4, 0, 2) \Rightarrow \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

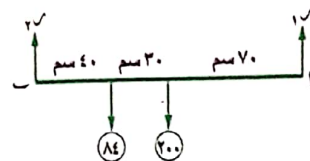
$$\therefore 2 - 2 = 0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$2 = 2 + 2 \Rightarrow 2 = 4$$

$$\therefore 2 = 2 + 2$$

٢٢

الحل



$$\text{من شروط الاتزان: } \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 284$$

$$\vec{M}_1 = \text{صفر}$$

$$\therefore 140 \times \vec{M}_1 - 100 \times 84 + 70 \times 200 = 284$$

$$\therefore \vec{M}_1 = 160 \text{ ث.كجم}$$

$$\text{ومن (1): } \vec{M}_1 = 124 \text{ ث.كجم}$$

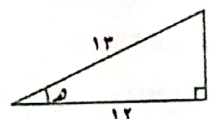
٢٣

الحل

$$\therefore \text{ماه} = \frac{0}{13} \text{ (موجبة)}$$

مه تقع في الربع

الأول أو الثاني



$$\therefore \text{ماه} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\therefore \vec{U} = (12, 12) = (12, 12) \text{ ماه}$$

$$\vec{U} = -\vec{U}$$

$$\therefore \vec{U} = (12, 12) = (12, 12) \text{ ماه}$$

$$\therefore 17 = 12 + 5 \text{ ومنها } 5 = 5$$

$$\therefore 12 = 12 + 0 \text{ ومنها } 0 = 0$$

٢٤

الحل

$$\therefore \text{مركز الثقل} = \frac{(1, 0) \times 2 + (1, 2) \times 2 + (2, 2) \times 1}{2 + 2 + 1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{8}{10}, \frac{2}{10} \right)$$

٢٥

الحل

$$\therefore \vec{r} = (1 - \vec{S}) + \vec{S} = 1$$

مركزها م (1, 0) وطول نصف قطرها

نقطة 3 وحدة طول

$$\therefore \vec{r} = (10 - \vec{S}) + \vec{S} = 10$$

مركزها م (10, 0)

الدائرتين متماسكتين من الخارج

$$\therefore \vec{r} = \sqrt{(10 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{101}$$

نقطة 6 وحدة طولية

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{\pi (2)^2}{\pi (6)^2} = \frac{\text{مساحة الدائرة د}}{\text{مساحة الدائرة د}}$$

كتلة الدائرة د = 4، كتلة الدائرة د = 4

مركز ثقل المجموعة يقع داخل د

٢٦

الحل

أحده متوازي أضلاع

$$\therefore \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = \vec{C}_3 + \vec{C}_4$$

$$\therefore 22 + 22 = 18 + 18$$

$$\therefore \vec{C}_1 = 82 \text{ وحدة عزم}$$

أى اه: س + ٣ = ٤

∴ العمودى يقطع محور الصادات فى النقطة ب = (٤/٣, ٠)

∴ طول أ ب = $\sqrt{(1 - \frac{4}{3})^2 + (0 - 0)^2} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ وحدة طولية

∴ عزم القوة ب بالنسبة للنقطة ب = $1.0 \times \frac{1}{3} \times 6 = 2.0$ وحدة عزم

= ٢.٠ وحدة عزم

النموذج السابع

١ ج

الحل

$$٢٤ = ٢ + ٢٢ \quad \therefore ٨ = ٢$$

∴ القوة الكبرى = ١٦ نيوتن

٢ ج

٢ ج

الحل

القوتين (١٢, ١٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$١٤٤ = ١٢ \times ١٢ = ١٤٤ \text{ نيوتن.سم}$$

، القوتين (٨, ٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$١٢٨ = ٨ \times ١٦ = ١٢٨ \text{ نيوتن.سم}$$

$$\therefore ج = ج + ج = ١٦ + ١٢٨ = ١٤٤ \text{ نيوتن.سم}$$

٤ ج

الحل

$$\therefore ج < ح$$

∴ ج، ح فى اتجاهين متضادين

$$٢٠ = ١٠ - ٣٠ = ٢٠ \text{ ث.كجم}$$

$$٩٠ \times ٢٠ = (س - ٩٠) \times ٣٠$$

$$\therefore ٦٠ = س - ٩٠ \quad \therefore س = ٣٠ \text{ سم}$$

٥ ج

الحل

$$(٨ - ٦) = \frac{(٤ - ٢) \times ١٠}{٥} = \frac{٢}{٥} \times ١٠ = ٤$$

$$\therefore ج = ٤ \times ١ = ٤$$

$$٤ \times ٨ = ٤ (٦ \times ٧ - ٨ \times ٢) = ٤ (٤٢ - ١٦) = ٤ \times ٢٦ = ١٠٤$$

٢٧ ج

الحل

$$\therefore ٤ = ٢$$

$$\therefore \frac{١}{٥} = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٤} = ١$$

$$\therefore ٤ = ١ + ١$$

$$\therefore \frac{٤}{٥} = ١$$

$$\therefore ح = (س - ٥٠) \text{ سم}$$

$$\therefore ١ = س - ٥٠$$

$$\therefore ٥٠ = س$$

∴ القضيبتان متزنان

$$\therefore ٥٠ = ٥٠ \times ٢ - (س - ٥٠) \times ٢$$

$$\therefore ٥٠ = ٥٠ \times ٢ - (س - ٥٠) \times ٢$$

$$\therefore ٥٠ = ٥٠ - س + ٥٠ \quad \therefore ١٠ = س$$

٢٨ ب

الحل

∴ مركز ثقل الكتلتين س، س

يؤثر فى النقطة د

∴ مركز ثقل الكتلتين ص، ٢

يقع فى منتصف م

$$\therefore \frac{١}{٥} = \frac{٢}{١٠}$$

$$\therefore \frac{١}{٥} = \frac{س}{٢}$$

$$\therefore ٥ = س$$

٢٩ ب

الحل

من خواص الشكل :

∴ ا ب ح مثلث متساوى الأضلاع

ومن الاتزان : ج = صفر

$$\therefore ٣٠ \times ٦٠ = ٤٠ \times ٦٠$$

$$\therefore ٣٠ \times ٦٠ = ٢٠ \times ٦٠$$

بالقسمة على ٦٠

$$\therefore ٧٥ = ٢٠$$

٣٠ ب

الحل

$$\therefore ص = ٣ \quad \therefore ص = ٣$$

∴ ميل المماس عند النقطة (١, ١) يساوى ٣

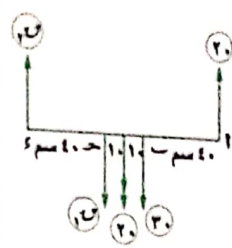
∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{١}{٣} = \frac{١ - ص}{١ - س}$



٦

الحل



$$(10 + 20) - (10 + 30) = 20$$

$$(1) \quad 10 = 20 - 10$$

∴ مجموع عزوم القوى حول

= عزم المحصلة حول

$$50 \times 20 = 40 \times 10 - 60 \times 20 - 100 \times 20$$

$$20 = 20 \text{ نيوتن ، وبالتعويض في (1) : } 20 = 20 \text{ نيوتن}$$

$$20 + 20 = 50 \text{ نيوتن}$$

٧

الحل

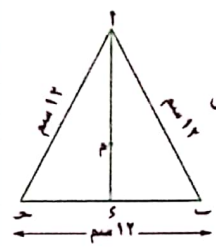
$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 (2 \times 1 + 0 \times 2) = (0, 2) \times (1, -2) =$$

$$\vec{r}_1 12 =$$

٨

الحل



مركز ثقل الصفیحة هو مركزها الهندسی

، من هندسة الشكل :

$$6 \times 3\sqrt{3} = 62$$

$$62 = 62 \times \frac{2}{3} = 62 \times 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

٩

الحل

$$\vec{r} = 200 \pm 200 \text{ نيوتن سم}$$

$$200 = 50 \times 20 - 40 \times 20$$

$$200 = (20 \times 50 + 20 \times 40)$$

$$200 = 20 \times 50 \text{ نيوتن}$$

١٠

الحل

$$2,5 = 10 \times \frac{1}{4}$$

$$2 = 2 \text{ الاحتكاك ليس نهائياً} \quad \therefore C = 2 \text{ ثكجم}$$

١١

الحل

في المثلث أ ب ح

$$120 \times 8 \times 7 \times 2 - 28 + 27 = 1$$

$$12 \text{ سم}$$

∴ القوى في اتجاه دورى واحد

$$\frac{5}{2} = \frac{22,5}{12} = \frac{20}{8} = \frac{17,5}{7}$$

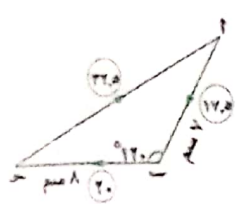
∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه الجبرى

$$2 = 2 \times \text{مساحة المثلث} \times \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} \times 120 \times 8 \times 7 \times \frac{1}{2} \times 2 =$$

$$= 3270 \text{ نيوتن سم}$$

$$\therefore \text{ معيار العزم } = 3270 \text{ نيوتن سم}$$



١٢

الحل

$$60 \times 6 \times 4 \times 2 + 26 + 24 = 6$$

$$2 = 19 \text{ ثكجم}$$

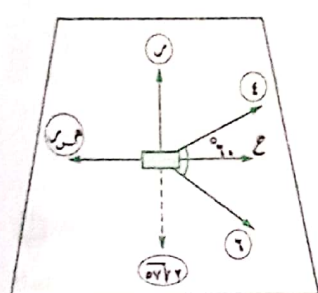
∴ الجسم متزن

وعلى وشك الحركة

∴ ح

$$2 = 19 \text{ ثكجم}$$

$$57 \times 2 = 57$$



$$\frac{2}{3} = \frac{19 \times 2}{57 \times 2} = \frac{C}{57} \quad \therefore \text{ معامل الاحتكاك} = \frac{C}{57}$$

١٣

الحل

∴ الجسم على وشك الانزلاق

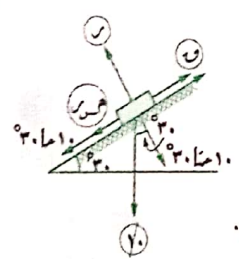
تحت تأثير وزنه.

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} = 20 \text{ سم}$$

∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى.

$$20 = 20 \text{ سم} + 20 \text{ سم}$$

$$20 \times 10 + 20 \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = 20$$



١٧

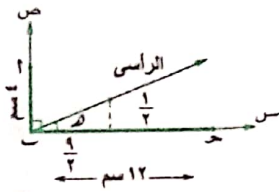
الحل

$$أ : ب : ح = ١ : ٢ : ٤$$

نفرض أن كتلة أ = ك

، كتلة ب = ٢ ك

وكل منهما في منتصف السلك



الكتلة	ك	ك	ك
س	٠	٦	٢
ص	٢	٠	٠

$$\frac{9}{2} = \frac{6 \times ك}{ك + ٢ ك} = س$$

$$\frac{1}{2} = \frac{ك}{ك + ٢ ك} = ص$$

، عند التعليق من ب

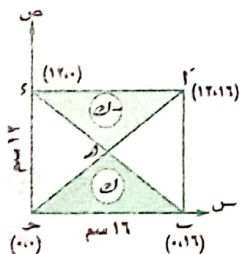
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

١٨

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين

ح_ب ، ح_أ



ك	ك	ك	ك
س	٨	٨	٨
ص	٦	٢	١٠

$$٨ = \frac{٨ \times ك - ٨ \times ك + ٨ \times ك}{ك - ك + ك} = س$$

$$٤ = \frac{١٠ \times ك - ٢ \times ك + ٦ \times ك}{ك - ك + ك} = ص$$

∴ مركز ثقل الصفحة = (٤ ، ٨)

١٩

الحل

$$\frac{9}{4} = \frac{٢ \times ٢ + ٢ \times ١ + ٠ \times ١}{٢ + ١ + ١} = س$$

$$٢ = \frac{٤ \times ٢ + ٠ \times ١ + ٠ \times ١}{٢ + ١ + ١} = ص$$

∴ مركز الثقل هو (٢ ، $\frac{9}{4}$)

(١)

$$٥ + س = ٥ \times \frac{1}{2} = ٥$$

(٢)

$$٢٧٥ = ٢٠ \times ١٠ = س$$

، بالتعويض من (٢) في (١) :

$$٥ = ٥ + ٥ = ٥ + ٢٧٥ \times \frac{1}{2} = ١٠ \text{ ث. كجم}$$

١١

الحل

$$\frac{1.7}{2} = \frac{2(٥-) + 2(١-) + 2(٣-)}{2(٢-) + 2(١) + 2(٣)} = \frac{1.7}{1.7} = ١$$

١٥

الحل

من شروط الاتزان

$$٢٠ = ١٦ + ١٤ = س$$

$$٢٠ = ١٦ + ١٤ = س$$

$$٠ = س \times ١٤ - ٧٠ \times ١٦ + ٧٠ \times ١٤ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$

$$٠ = ١٠ \times ١٤ - ١١٢٠ + ١٤٠ = س$$


$$\frac{\sqrt[3]{27}}{3} = \text{مس}$$
$$= -72\text{س} + 1.8\text{ص}$$


٢٠



$$و = حمر \times و مام + و مام$$

$$\therefore 1 = حمر مام + مام$$

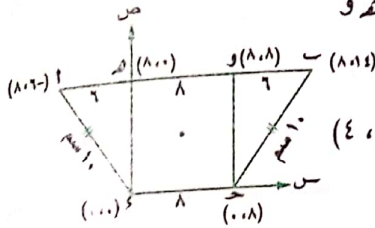
(بالقسمة على مام)

$$\therefore قام = حمر + طام$$

١١ ١

الحل

∴ مساحة المربع حء و



$$8 \times 8 =$$

$$64 = \text{ومركزه } (4, 4)$$

، مساحه Δ حء و

$$24 = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} =$$

$$\text{ومركزه } \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$\text{، مساحه } \Delta \text{ حء و } 24 = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} = \text{ومركزه } \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

الكتلة	24	24	64
س	2-	10	4
ص	$\frac{16}{3}$	$\frac{10}{3}$	4

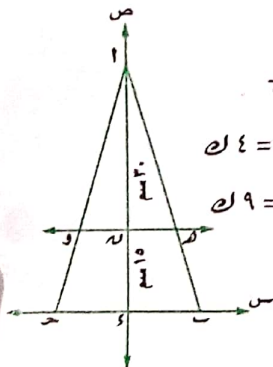
$$س م = \frac{2- \times 24 + 10 \times 24 + 4 \times 64}{24 + 24 + 64}$$

$$ص م = \frac{\frac{16}{3} \times 24 + \frac{10}{3} \times 24 + 4 \times 64}{24 + 24 + 64}$$

$$\therefore \text{مركز ثقل الصفيحة هو } \left(\frac{22}{3}, 4\right)$$

١٢ ١

الحل



$$\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

∴ كتلة الصفيحة المثبتة حء و 4

، كتلة الصفيحة المثبتة حء و 9

الكتلة	4-	9
س	0	0
ص	20	10

$$\therefore س م = \frac{0 \times 9 + 0 \times 4-}{0 + 4-} = \text{صفر}$$

$$ص م = \frac{10 \times 9 + 20 \times 4-}{0 + 4-} = 7$$

∴ مركز ثقل الشكل الرباعي هو (7, 0) ويبعد 7 سم عن

٨ ١

الحل

بفرض أن الفتاة تصعد مسافة س

يكون عندها السلم على وشك الانزلاق

معادلات الاتزان :

$$س م = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$80 = 2$$

$$\frac{3\sqrt{2} \times 40}{3} = 80 \times \frac{1}{2} = 40$$

، حء = صفر

$$\therefore 20 \times \frac{1}{2} \times 60 + 60 \times 60 = 60 \times 60$$

$$- 60 \times 60 = 60 \times 60$$

$$60 \times 60 = 60 \times 60$$

$$\therefore 20 = 60 - 40 = 20$$

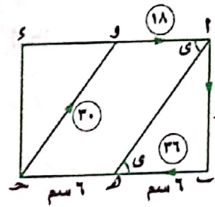
$$\therefore س = 20$$

أياه: أقصى مسافة تصعدا الفتاة تساوى $\frac{1}{2}$ طول السلم.

٩ ١

الحل

من هندسة الشكل :



$$أ م = 10 = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

∴ القوى تعمل في اتجاه دورى واحد

$$2 = \frac{18}{6} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$$

∴ القوى تكون ازدواجاً قياسه الجبرى حء حيث

$$حء = 2 \times 2 = 4$$

$$حء = 2 \times 2 = 4$$

نفرض أن القوتين (حء، حء) تعملان في اتجاه حء، وحء

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى حء

$$\therefore حء = 4$$

$$\therefore 423 = \frac{8}{1} \times 6 \times حء$$

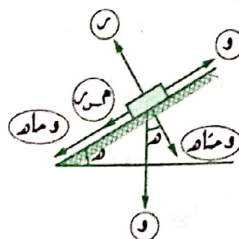
١٠ ١

الحل

∴ الجسم على وشك الحركة :

$$\therefore س = و مام$$

$$و = حمر س + و مام$$



١٦ ج

الحل

$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$
 بفرض أن $\vec{v}_1 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
 $\therefore \|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
 $\therefore \|\vec{v}_2\| = 10$
 $\therefore \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 10$
 $\therefore \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \times 10 \cos \theta$
 $\therefore \cos \theta = \frac{10}{3 \times \sqrt{14}}$
 $\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{3\sqrt{14}} \right)$

١٧ ب

الحل

القوتان (٣٠٠، ٢٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى
 $\vec{F}_1 = 300\vec{e}_1 + 200\vec{e}_2$
 القوتان (٤٠٠، ٤٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى
 $\vec{F}_2 = 400\vec{e}_1 + 400\vec{e}_2$
 $\therefore \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 700\vec{e}_1 + 600\vec{e}_2$
 \therefore معيار عزم الازدواج = ٦٥٠ نيوتن.متر

١٨ ا

الحل

من هندسة الشكل : $\vec{a} = (6, 0, 0)$
 $\vec{b} = (0, 4, 0)$
 $\vec{c} = (0, 0, 4)$
 $\vec{d} = (6, 4, 0)$
 $\vec{e} = (6, 0, 4)$
 $\vec{f} = (0, 4, 4)$
 $\therefore \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 24)$
 $\vec{a} \times \vec{c} = (0, -24, 0)$
 $\vec{b} \times \vec{c} = (-16, 0, 0)$
 $\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (-16, -24, 24)$
 $\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (-16, -24, 24)$
 $\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (-16, -24, 24)$
 $\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (-16, -24, 24)$

١٩ ١

الحل

الكتلة	٢ ك	ك
س	٥ ج	٥
ص	٠	٢٠ ج

$\vec{F}_1 = 5\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2$
 $\vec{F}_2 = 5\vec{e}_1$
 $\therefore \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 10\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2$
 \therefore مركز الثقل = $(\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$

وبفرض أن θ هي زاوية ميل \vec{F} على الرأسى

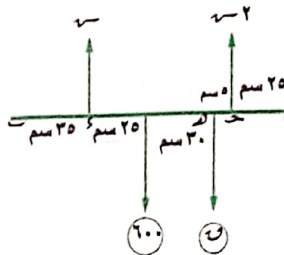
$\tan \theta = \frac{20}{10} = 2$
 $\therefore \theta = \tan^{-1}(2)$

$\therefore \vec{F}$ يعمل على الأفقى بزاوية ظلها = $\frac{4}{3}$

٢٠ ج

الحل

من معادلات الاتزان :

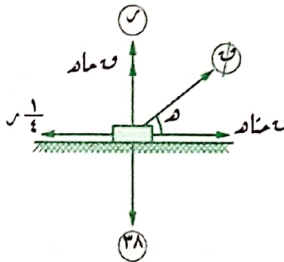


(١) $60 + 20 = 30$
 \therefore القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول H = صفر
 $\therefore 60 \times 30 - 20 \times 60 + 30 \times 30 = 0$
 $\therefore 1800 - 1200 + 900 = 0$
 بالتعويض فى (١) :
 $60 + 20 = 40 \times 2$
 $\therefore 60 = 20$

٢١ د

الحل

من معادلات الاتزان :



(١) $28 + 28 = 28$
 $\therefore 28 = 28$
 $\therefore 28 = 28$
 (٢) $28 = 28$
 بالتعويض من (٢) فى (١) :
 $28 = 28$
 $\therefore 28 = 28$
 $\therefore 28 = 28$



٢٩ د

الحل

∴ طول العمود المرسوم من ب على خط عمل ق = طول العمود المرسوم من ح على خط عمل ق

∴ ب ح لا يوازي ق

∴ خط عمل ق ينصف ب ح

∴ $\vec{C} = -\vec{C}$ ∴ $\vec{C} = \vec{C} + \vec{C} = \text{صفر}$

٢٥ ا

٢٢ ا

في $\Delta م ن ه$:

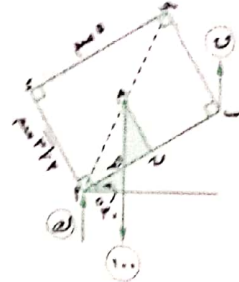
∴ $م ن = \frac{1}{3} ه ن$

$3 م ن = ه ن$

، $م ن ه ط ا = 20 سم$

، $م ن = \frac{1}{3} ه ن = 2.5 سم$

∴ $ه ن = 1 - 2.5 = 1.5 سم$



(١) ∴ المجموعة متزنة : ∴ $و + ل = 100$

، ∴ $ج = 0$

∴ $0 = 20 \times 5 \times و + 20 \times 1.5 \times 100$

∴ $و = 20$

ومن (١) : ∴ $ل = 70$ ∴ $و - ل = 40$

٢٣ د

الحل

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

فإن : $و = 7 + 2 = 10$ نيوتن

وفي حالة أن تكون نقطة تأثير القوة هي ح

فإن $ج = 6 \times 7 - 14 \times 2 = \text{صفر}$

∴ المجموعة تكون متزنة (تعارض)

∴ لابد أن تكون نقطة تأثير القوة و هي أي نقطة على

القضيب غير النقطة (ح)

٢٣ ج

الحل

∴ $ج = و = 0$ ، $و = م = 80$

، ∴ $م = م = 80 \times \frac{2}{4} = 60$

∴ $ج : م = 60 : 50 = 6 : 5$

٢٤ د

الحل

∴ معادلة الدائرة هي

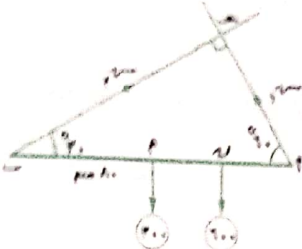
$(م - 2)^2 + (ن - 3)^2 = 16$

∴ مركز الثقل يقع في مركز الدائرة (٢ ، ٣)

٢٥ ا

٢٦ ب

الحل



∴ القضيب متزن

∴ $م ن = \text{صفر}$

∴ $م ن = \frac{3}{4} ه ن$

∴ $3 م ن = ه ن$

(١) ، $م ن = \text{صفر}$

∴ $م ن = 20$ ، $ه ن = 60$ ، $و = 90$

∴ $و = \frac{1}{3} ه ن + م ن = 90$

(٢) ∴ $1800 = م ن + 3 م ن$

، من (١) ، (٢) : ∴ $3 م ن + م ن = 1800$

∴ $م ن = 450$ ثجم ، $ه ن = 450$ ثجم

، $ج = \text{صفر}$

∴ $و = 160 \times 450 - 80 \times 200 + 90 = \frac{1}{3} \times \text{صفر}$

∴ $و = 20 سم$

٢٧ ب

الحل

∴ الجسم غير متزن

∴ $ل > و$

∴ أقل كتلة ل يجب وضعها هي التي

تجعل الجسم على وشك الحركة

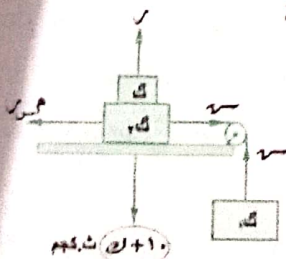
$م ن = ل = 5$ ث.كجم

، $م ن = (ل + 10)$ ث.كجم

، $م ن = م ن$

∴ $0 = 0.15 \times (ل + 10)$

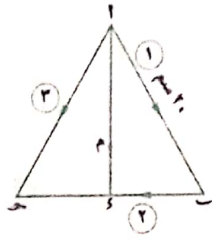
∴ $ل = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24$ ث.كجم



OPPO A1k

٢ ب

الحل



نفرض أن البعد العمودي بين كل من القوى ، النقطة م

$$= (ل) سم$$

$$م = ل \times (٢ - ٢ + ١) = صفر$$

٢ ا

الحل

بفرض أن $م = ٢$ ، $ل = ٢$ ، $٢ = ٢$

$$\therefore ١٥ = ل \therefore ١٥ = ل \therefore ١٥ = ل$$

$$\therefore ١٠ = م = ١٠ نيوتن$$

$$\therefore ٥ = م - ٥ نيوتن$$

٤ ا

الحل

$$٦ = \frac{٢}{٥} = ٦ نيوتن$$

٥ ب

الحل

من هندسة الشكل :

$$١٥ = \sqrt{٢٩^2 + ١٢^2} = ٣١ سم$$

القوى تؤثر في اتجاه

دوري واحد

$$٣ = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٧٢}{٢٤} = \frac{٢٧}{٩}$$

القوى تكون ازدواجاً قياسه الجبرى ج

$$٢ - = ٢ \times مساحة شبه المنحرف ج$$

$$٢ - = \frac{١}{٢} \times ٩ \times (١٢ + ٢٤) = ٩٧٢ نيوتن سم$$

نفرض القوتين (٣ ، ٢) تعملان في اتجاه هـ ، حـ تكونان

ازدواجاً قياسه الجبرى ج

$$٢ = ١٢ \times ٢ = ٢٤ (د هـ) = ٩ \times ١٢ \times \frac{١}{١٥} = \frac{٣٦}{٥} نيوتن$$

$$\therefore ١٣٥ = ٢ + ٢٤ \therefore ١٣٥ = ٢$$

٦ ج

الحل

نفرض أن $م = ٢$ (س ، ص)

$$\therefore ٣ = \frac{٤ \times ٢ + ١ \times ٢}{٢ + ٢}$$

٢٨ د

الحل

معيار مجموع عزوم القوتين حول حـ = ١٠٠٠ نيوتن سم

القياس الجبرى للعزم = ± ١٠٠٠ نيوتن سم

$$\therefore ١٠٠ \times ٢٠ - ٢٥ \times ٤٥ = \pm ١٠٠٠$$

$$\therefore ١٠٠ \pm = \frac{٢٢٢٥}{٢} - ٢٠٠٠$$

$$\therefore ١٠٠ = \frac{٢٢٢٥}{٢} - ٢٠٠٠ \therefore ٢٠٠٠ = \frac{٢٢٢٥}{٢} - ١٠٠$$

$$\therefore ٢٢٢٠ = ٢٢٢٥ - ٤٠ \therefore ٢٢٢٠ = ٢٢٢٥ - ٤٠$$

٢٩ ب

الحل

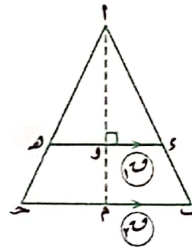
المجموعة متزنة

$$\therefore ١٠ \times ٢٢٨ = ٢٢١٠ \times ١ + ٢٢١٠ \times ٢$$

$$\therefore ٥ = ٥ ث ج$$

٣٥ د

الحل



معيار عزم م بالنسبة إلى ١

معيار عزم م بالنسبة إلى ٢

$$\frac{١ \times ١}{٢ \times ٢} = \frac{١ \times ١}{٢ \times ٢}$$

(لأن وحدة قياس القوة ممثلة بوحدة الأطوال)

$$\frac{١}{٢} = \frac{مساحة \Delta ١}{مساحة \Delta ٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \left(\frac{٢}{٥}\right) = \frac{٩}{٢٥} \text{ (لأن المثلثان متشابهان)}$$

النموذج التاسع

١ ب

الحل

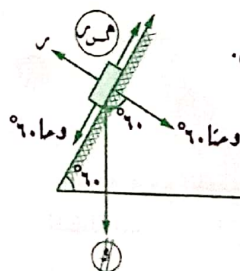
$$١٢ \times ٦٠ = ٣٦٦ نيوتن$$

$$٦٠ \times ١٢ \times \frac{٢٢}{٩} = ٦٠$$

$$= \frac{٢٢٢}{٣} نيوتن$$

$$\therefore ٦٠ < ٦٠$$

الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً على المستوى الخشن.





١١

الحل

نفرض أن بعد مركز ثقل
القضيب عن النقطة ح = س

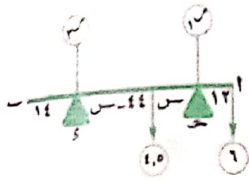
∴ القضيب على وشك الدوران

حول ح

$$0 = \sum \tau$$

$$12 \times 6 = 4.5 \times s \quad \therefore s = 16 \text{ سم}$$

∴ مركز ثقل القضيب يبعد مسافة ١٦ سم من النقطة ح



١٢

الحل

∴ الجسم على وشك الحركة.

$$\therefore \tau_{\text{مأ } 30} = \frac{1}{4} \tau$$

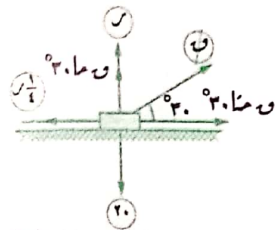
$$\therefore \frac{1}{4} \tau = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau$$

$$\therefore \tau = 3\sqrt{2} \times 2$$

$$\tau = 12\sqrt{2} \text{ ما } 30$$

وبالتعويض من (١) ∴ $\tau = \frac{1}{4} + 3\sqrt{2} \times 2$

$$\therefore \tau = 0.05 \text{ نيوتن}$$



(١)

١٣

الحل

نفرض أن القوى $\vec{C} = (س، ص)$

$$\therefore \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \times (1, -6) = (س، ص) \times (1, -6)$$

$$\therefore (-6س - ص) = -28$$

$$\therefore -6س - ص = -28$$

(١)

$$\vec{C} \times \vec{B} = \vec{C} \times (2, -2) = (س، ص) \times (2, -2)$$

$$\therefore (-2س + 2ص) = -28$$

(٢)

$$\therefore -2س + 2ص = 28$$

$$\text{من (١)، (٢) ∴ } 8 = س، 6 = ص$$

$$\therefore \vec{C} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$$

١٤

الحل

∴ مجموع عزوم القوى حول النقطة ب = عزم المحصلة حول
النقطة ب

$$\therefore \tau \times 8 = (س + 1.5) \times 8$$

$$\therefore \tau = 8 + 20 = 28 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore s = 4$$

$$\therefore 2 + 4 = 6 \text{ سم}$$

$$\frac{9 \times 3 + 2 \times 2}{3 + 2} = 7$$

$$\therefore 7 + 21 = 28 \text{ سم}$$

$$\therefore \tau = 6 - 4 = 2 \text{ سم}$$

١٥

الحل

$$\tau = 2 \text{ ما } 30$$

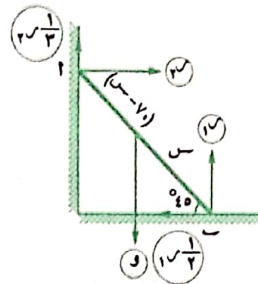
$$\therefore \tau = 1 \text{ (د) } 45^\circ$$

١٦

١٧

الحل

نفرض أن وزن القضيب (و) ويبعد مسافة س عن النقطة ب
معادلات الاتزان :



$$\tau = \frac{1}{4} \tau + w$$

$$\tau = \frac{1}{4} \tau$$

من (١)، (٢) :

$$\tau = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + w$$

$$\tau = \frac{1}{4} w$$

$$\tau = \frac{1}{4} w$$

$$\tau = \frac{1}{4} w$$

$$\tau = 0$$

$$\therefore س \times و \text{ ما } 45^\circ - 70 \times \tau \times 40 \text{ ما } 45^\circ$$

$$- 70 \times \frac{1}{4} \tau \times 40 \text{ ما } 45^\circ = 0 \text{ (بالقسمة على ما } 45^\circ)$$

$$\therefore س \times و - 70 \times \frac{1}{4} \times 40 = 0$$

بالقسمة على (و) ∴ س = 40 سم

∴ مركز ثقل القضيب يبعد 40 سم عن الطرف (ب)

١٨

الحل

القوتان (٢٤، ٢٤) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$= 24 \times 40 = 960 \text{ نيوتن.سم}$$

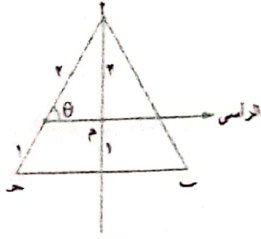
القوتان (٨٠، ٨٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$= 80 \times \theta$$

∴ القضيب متزاناً

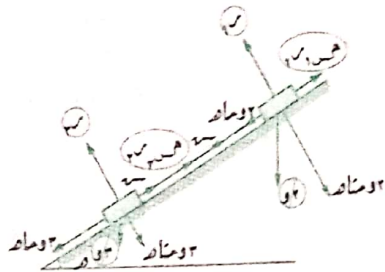
$$960 - 80 \times \theta = 20 \times \theta \text{ صفر}$$

$$\therefore \theta = 6$$



من هندسة الشكل :
نجد أن $\overline{BC} \parallel \overline{الرأس}$
∴ $\angle (د) = \theta = 60^\circ$

١٧
د
الحل



الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل الجسم ذو
معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك الجسمان معاً والخيط
مشدود بينهما.

• بالنسبة للجسم الذي وزنه ٣ و :

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل.

$$\therefore \text{س} + \text{س} = \text{س} + ٣ = ٣ \text{ و } ٣ \text{ و } ٣$$

$$\text{س} = ٣ \text{ و } ٣ = ٣$$

$$\therefore \text{س} = ٣ \text{ و } ٣ - ٣ \times \frac{1}{4} = ٣ \text{ و } ٣$$

$$= ٣ \text{ و } ٣ - \frac{1}{4} = ٣$$

(١)

• بالنسبة للجسم الذي وزنه ٢ و :

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل :

$$\therefore \text{س} = ٢ \text{ و } ٢ = ٢ \text{ و } ٢ = ٢ \text{ و } ٢$$

$$\therefore \text{س} = ٢ \text{ و } ٢ \times \frac{1}{4} = ٢ \text{ و } ٢ - ٢ = ٢$$

(٢)

$$= \frac{1}{4} \text{ و } ٢ - ٢ = ٢$$

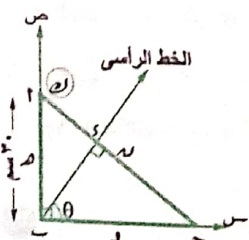
من (١) ، (٢) :

$$\therefore ٢ \text{ و } ٢ - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ و } ٢ - ٢ = ٢$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{١}{٥} \text{ و } ٢ = ٢$$

$$\therefore \frac{1}{5} = ٢$$

١٩
أ
الحل



بفرض أن $\overline{BC} = \overline{س}$

$$\therefore \overline{BC} = ٩٠ - \overline{س}$$

$$\therefore \overline{س} + \overline{س} = \overline{س} + ٩٠ = ٩٠$$

$$\therefore \overline{س} + ٨١٠٠ = ١٨٠ - \overline{س}$$

$$\therefore \overline{س} + ٩٠٠ =$$

$$\therefore ٢٨ \times \overline{س} = ٨ = (١٠٠ + ١٠)$$

$$\therefore ٢٨ \times \overline{س} - ٨ = ١٢ \therefore ٢٠ = \overline{س}$$

$$\therefore \overline{س} = \frac{١٢}{٢٠} = ٠,٤ \text{ سم}$$

٢٠
أ
الحل

∴ القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري ج_١

$$\therefore \text{ج} = ٦ \times ٧٠ = ٢١٠ \text{ و } ٢١٠ = ٢١٠ \text{ و } ٢١٠ = ٢١٠$$

∴ القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواجاً

قياسه الجبري ج_٢

$$\therefore \text{ج} = ٦$$

$$\therefore \text{ج} = ٦ \times ٣٥ = ٢١٠$$

$$= ١٧,٥ \text{ و } ١٧,٥ =$$

$$\therefore \text{ج} = ٦ + ٦ = ١٢$$

$$\therefore ٢١٠ = ٢١٠ - ١٧,٥ = ١٩٢,٥$$

$$\therefore \text{ج} = ١٢ = ١٢ \text{ و } ١٢ = ١٢ \text{ و } ١٢ = ١٢$$

٢١
ب
الحل

من هندسة الشكل :

$$(١٥, ٠, ٠) = \overline{أ}$$

$$(٠, ٥, ٥) = \overline{ب}$$

$$\therefore \overline{أ} - \overline{ب} = \overline{أ} - \overline{ب}$$

$$(١٥, ٥, ٥) =$$

$$\therefore \overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{أ} \times \overline{ب}$$

$$\frac{(١٥, ٥, ٥)}{\sqrt{(١٥)^2 + (٥)^2 + (٥)^2}} \times \sqrt{١٥^2 + ٥^2 + ٥^2} =$$

$$(٤٥, ١٥, ١٥) =$$

$$\therefore \overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{أ} \times \overline{ب}$$

$$(٤٥, ١٥, ١٥) \times (١٥, ٠, ٠) =$$

$$\begin{vmatrix} \overline{أ} & \overline{ب} & \overline{س} \\ ١٥ & ٠ & ٠ \\ ٤٥ & ١٥ & ١٥ \end{vmatrix} =$$

$$= ٢٢٥ - ٢٢٥ = ٠$$



١٨٠ سم = ٧٢٠٠ : ٤٠ سم

٤٠ سم = ١٠ سم

نستخلص من كتلة السلك بثلاث كتل بنسبة ٣٠ : ٤٠ : ٥٠

أي ١٥ : ٢ : ٣ عند منتصف أ ب ، ج ، د

الكتلة عند د = ١٥٠ جرام

الكتلة عند ج = ٢٠٠ جرام ، الكتلة عند ب = ٢٥٠ جرام

أ	ب	ج	د	
ك	٢٥٠	٢٠٠	١٥٠	ك
٠	٢٠	٢٠	٠	س
٣٠	١٥	٠	١٥	ص

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$\frac{9000}{م} = \frac{20 \times 250 + 20 \times 200}{ك + 250 + 200 + 150}$

ص = $\frac{20 \times ك + 15 \times 250 + 15 \times 150}{ك + 250 + 200 + 150}$

ومن هندسة الشكل :

س = $\frac{40 \times 20}{50} = ١٦$ سم ، ج = ٣٢ سم

$\frac{4}{3} = \frac{32}{24} = \frac{ج}{س} = \theta$ ،

$\frac{4}{3} = \frac{ك + 600}{9000} \times \frac{ك ٣٠ + 600}{ك + 600}$

٣٦٠٠٠ = ٩٠ + ١٨٠٠٠ : ك = ٢٠٠ جم

٢٠

الحل

س = $\frac{٩٠ \times ١٢ + ٠ \times ٦}{١٢ + ٦} = \frac{١٠٨٠}{١٨} = ٦٠$ سم

أي ٥ : مركز ثقل الجسمين يقع على بُعد ٦٠ سم من الجسم ٦ كجم.

٢١

الحل

قوة الاحتكاك النهائي = $٣ \times \frac{1}{3} = ١$ نيوتن.

الجسم تحت تأثير قوة أفقية تحاول تحريكه

$٠ < ج < ١$: $٠ < ج < ١$: $١ \geq ج$

قوة الاحتكاك $\in [١, ٠]$

٢٢

٢٣

الحل

$\frac{١ + (٢٠,٢)٢ + (٥٠,٤)٢ + (١٠,٢)٢}{٤ + ٢ + ٢ + ١} = (٠,٠)$

$(٢٠,٢) = (٠,٠) : (٤ - س - ٤, ٤ - ص - ٢٠) = (٠,٠)$

$٠ = ٤ - س - ٤$: $١ = س$

$٠ = ٢٠ + ص - ٤$: $٥ = ص$

$(٥, ١) = (س, ص)$

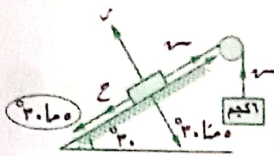
٢٤

الحل

$ج = (٥ ما \theta) \times ل = ل \times (٤ ما \theta)$

٢٥

الحل



$٦ = س$: ٦ ث كجم

$٥ < س$: ٥ ما ٢٠

الجسم على وشك الحركة لأعلى

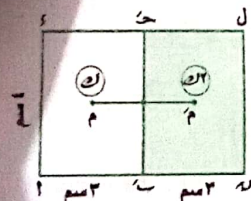
اتجاه قوة الاحتكاك لأسفل

$٦ = ٥ + ج$: $٦ = ٥ + ج$

$٣,٥ = ج$: $٣,٥$ ث كجم

٢٦

الحل



بفرض كتلة أ = ح = ك

وتؤثر في نقطة تبعد عن أ

مسافة ١,٥ سم

كتلة ل = د = ح = ٢

وتؤثر في نقطة تبعد عن أ مسافة ٤,٥ سم

مركز الثقل يقسم م بنسبة ٢ : ١

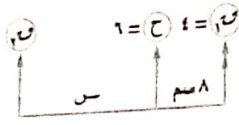
$٣ = م$: $٣ = م$ سم

مركز الثقل على بعد ٢ سم من النقطة م

مركز الثقل على بعد $١,٥ + ٢ = ٣,٥$ من أ

٢٧

الحل



$$٢٧ = ٤ - ٦ = ٢ \text{ ث.كجم}$$

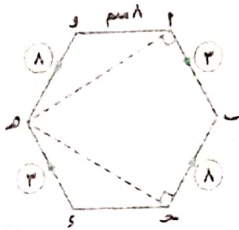
$$٨ \times ٤ = ٢ \times \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = ١٦ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{البعد بين } ٢ \text{ و } ١ = ١٦ + ٨ = ٢٤ \text{ سم}$$

٢٨

الحل



من خواص الشكل السداسي

$$\text{أ} = \text{ح} = ٨$$

$$\text{س} = ٨ \times \sqrt{٣}$$

القوتان (٢، ٢) تكونان ازدواجاً.

قياسه الجبري ج.

$$\text{ج} = -٢٤ - ٨ \times \sqrt{٣} = -٢٤ - ٨\sqrt{٣}$$

والقوتان (٨، ٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري ج.

$$\text{ج} = ٨ \times \sqrt{٣} = ٨\sqrt{٣}$$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه الجبري

$$= -٢٤ - ٨\sqrt{٣} + ٨\sqrt{٣} = -٢٤ \text{ ث.كجم سم}$$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه $٢٤ \sqrt{٣}$ ث.كجم سم

٢٩

الحل



\therefore أضلاع المثلث تمثل القوى

تمثيلاً تاماً

$$\therefore \frac{٢}{٢} = \frac{١٩,٥}{١٣} = \frac{١٢}{٨} = \frac{١٠,٥}{٦}$$

$$\therefore \text{أ} = ٧ \text{ سم، ب} = ٨ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{٢ - ٢ + ٢}{٢} = ١$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١٦٩ - ٦٤ + ٤٩}{٨ \times ٧ \times ٢}$$

$$\therefore \text{و} = ١٢٠^\circ \text{ (د)}$$

\therefore الأضلاع في اتجاه دوري واحد

٢٨

الحل

$$\vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{C} \times \vec{B} = \text{عزم الازدواج}$$

$$\vec{C} \times ١٢ = (٢, ٢) \times (٢, ٢) =$$

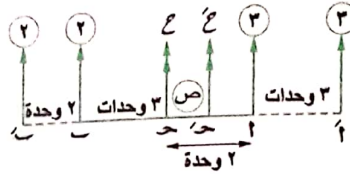
$$\therefore \vec{C} \times \vec{B} = \vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A}) = (٢, ٢) \times (٢, ٢) = ٠$$

$$\therefore \text{طول العمود من } \vec{A} \text{ على } \vec{C} = \frac{\|\vec{C} \times \vec{B}\|}{\|\vec{C}\|} = \frac{\|١٢\|}{\|٢ - ٢\|} = \frac{١٢}{٤ + ٩} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$= \frac{١٢}{١٣} \text{ وحدة طول.}$$

٢٩

الحل



\therefore ح تقسم أ ب

بنسبة ٢ : ٣

$$\therefore \text{أ} = ٢ \text{ وحدة، ح} = ٣ \text{ وحدات}$$

بعد انتقال القوة (٢)، (٣)

فإن المحصلة تؤثر في النقطة ح

$$\frac{\text{أ}}{\text{ح}} = \frac{٢}{٣} \quad \therefore \text{أ} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{أ} = ٤ \text{ سم، ح} = ٥ \text{ سم}$$

\therefore مقدار المحصلة ينتقل في اتجاه أ مسافة وحدة طول

٣٠

٣١

الحل

$$\therefore \text{معيار عزم و حول ح} = \|\vec{C}\| \times \|\vec{A}\|$$

$$\therefore ٣٠٠ = ٥ \times \sqrt{٣} \quad \therefore \sqrt{٣} = ٦٠ \text{ نيوتن.}$$

النموذج العائش

٣٢

٣٣

الحل

$$\vec{C} \times \vec{B} = (١, ١) \times (٥, ٢) = ٧ \text{ ع}$$

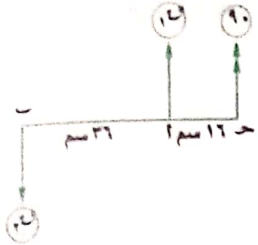
$$\therefore \vec{C} \times \vec{B} = ٧ \text{ ع}$$

١١ ب
الحل

$$ج = ١٠ - ٤ \times ٤٠ + ٦ \times ٢٥ = ١٠ \text{ ث كجم. متر.}$$

١٢ ا
الحل

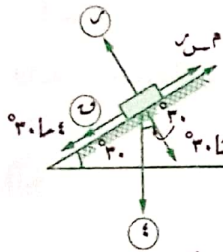
١٣ ا
الحل



١٤ ا
الحل

$$ج = ٤٠ \times ٢ \sqrt{٢} \text{ م} - ٥ \times ٤٠ \times ٢ \sqrt{٢} \text{ م} = ٣٢٠ \text{ م}$$

١٥ ا
الحل



١٦ ا
الحل

١٧ ا
الحل

١٨ ا
الحل

$$ج = ١٢ \times ٥ \times ٣٠ = ١٨٠٠ \text{ ث كجم. سم}$$

$$ج = ٣٠ \times ٢ \sqrt{٢} \text{ ث كجم. سم}$$

$$ج = ٣٠ \times ٢ \sqrt{٢} \text{ ث كجم. سم}$$

$$ج = ٣٠ \times ٢ \sqrt{٢} \text{ ث كجم. سم}$$



١٩ ا
الحل

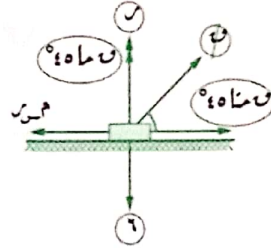
$$ج = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

$$ج = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

$$ج = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

٢٠ ا
الحل

٢١ ا
الحل



$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

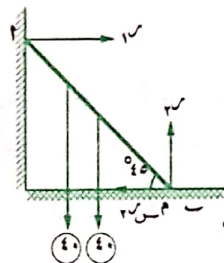
$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

$$ج = ٦ + ٤ = ١٠$$

٢٢ ا
الحل

$$ج = ١٢ - ٥ = ٧ \text{ نيوتن}$$

٢٣ ا
الحل



$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

$$ج = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$$

٢٤ ا
الحل

$$ج = (٤٠, ٢٥, ١٥) \times (٢, ٣, ٢) = ١٠٠$$

$$ج = (٤٠, ٢٥, ١٥) \times (٢, ٣, ٢) = ١٠٠$$

$$ج = (٤٠, ٢٥, ١٥) \times (٢, ٣, ٢) = ١٠٠$$

$$ج = (٤٠, ٢٥, ١٥) \times (٢, ٣, ٢) = ١٠٠$$

أى : ٨ : ٣ : ٤ : ٥

الكتلة	ك ٨	ك ٣	ك ٤	ك ٥
س	٨	٠	٤	١٢
ص	٠	٣	٦	٣

$$س = \frac{٨ \times ك ٨ + ٤ \times ك ٤ + ٣ \times ك ٣}{٢٠} = ٧$$

$$ص = \frac{٣ \times ك ٥ + ٦ \times ك ٤ + ٣ \times ك ٣}{٢٠} = ٢,٤$$

$$\therefore \text{بعد مركز الثقل عن نقطة } P = \sqrt{٣(٧) + ٢(٢,٤)}$$

$$= ٧,٤ \text{ سم}$$

٢٠ ب

الحل



بتوزيع الكتلة ٣ كجم على

الرؤوس ١، ٢، ٣

لتصبح كتلة عند ٣ = ٣ كجم

عند ٢ = ٣ كجم

عند ١ = ١٢ كجم

باختيار اتجاهين متعامدين ١-س، ٢-ص

بفرض أن طول ضلع المثلث «ل»

$$\therefore ح = \frac{٣\sqrt{3}}{٢} \quad \therefore م = \left(\frac{٣\sqrt{3}}{٢}, \frac{١}{٢} \right)$$

$$هـ = \left(\frac{٣\sqrt{3}}{٢}, \frac{١}{٢} \right)$$

ح	ب	١	ك
١٢	٣	٣	س
$\frac{١}{٢}$	ل	٠	ص
$\frac{٣\sqrt{3}}{٢}$	٠	٠	ص

$$س = \frac{\frac{١}{٢} \times ١٢ + ل \times ٣}{١٢ + ٣ + ٣} = \frac{١}{٢}$$

$$ص = \frac{\frac{٣\sqrt{3}}{٢} \times ١٢}{١٢ + ٣ + ٣} = \frac{٣\sqrt{3}}{٢}$$

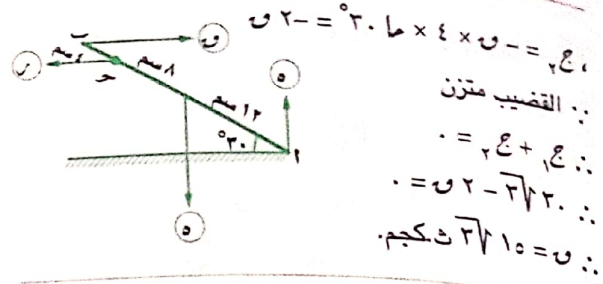
$$\therefore \text{مركز ثقل المجموعة} = \left(\frac{٣\sqrt{3}}{٢}, \frac{١}{٢} \right)$$

بالنسبة للنقطة «١» وهو نفس إحداثيات النقطة هـ (منتصف ح)

حل آخر :

الكتلتان ٣ كجم، ٣ كجم المؤثرتان في ١، ب نستعيز بهما

بكتلة ٦ كجم وتؤثر في النقطة و منتصف أ



$$\therefore ١٥ = ٣\sqrt{٣} \text{ كجم}$$

١٦ ب

الحل

أقل قوة تكون عندما $\theta = ٩٠^\circ$

$$\therefore ٤٠ = ٢٠ \times ح$$

$$\therefore ح = ٢٠ \text{ نيوتن}$$

وهي أقل قوة تحقق دوران المسار.

١٧ ب

الحل

باختيار أ-ح هو الأفقى، أ-ب هو الرأسى

الكتلة	٢٠	٤٠	٢٠
س	١٥	٠	٠
ص	٠	١٢	٠

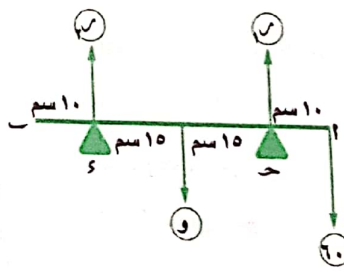
$$س = \frac{١٥ \times ٢٠ + ٠ \times ٤٠ + ٠ \times ٢٠}{٢٠ + ٤٠ + ٢٠} = ٥$$

$$ص = \frac{٠ \times ٢٠ + ١٢ \times ٤٠ + ٠ \times ٢٠}{٢٠ + ٤٠ + ٢٠} = \frac{١٦}{٣}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = \left(\frac{١٦}{٣}, ٥ \right)$$

١٨ ا

الحل



نفرض أن وزن القضيب (و)

القضيب على وشك

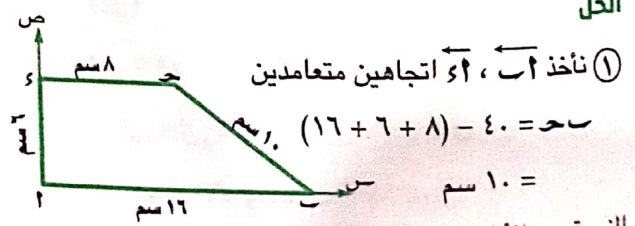
الدوران حول النقطة ح

$$\therefore ٠ = م$$

$$\therefore ١٥ \times و = ١٠ \times ٦٠ \quad \therefore و = ٤٠ \text{ نيوتن}$$

١٩ ا

الحل



١) نأخذ أ-ب، أ-ح اتجاهين متعامدين

$$س = ٤٠ - (١٦ + ٦ + ٨) = ١٠$$

النسبة بين الأطوال هي ١٦ : ٨ : ٦ : ١٠



$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = (20, 0, 0)$$

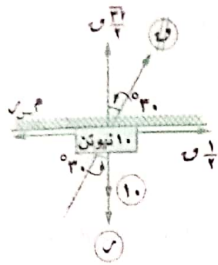
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0) = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

\therefore مركبة عزم القوة \vec{u} بالنسبة للمحور z = 20.

٢٥

الحل



\therefore الجسم على وشك الحركة

$$\therefore \frac{F_2}{2} = 10 + F_1$$

$$\therefore F_1 = \frac{F_2}{2} - 10 \quad (1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} F_2$$

$$\therefore \frac{F_2}{2} = F_1 \quad (2)$$

وبالتعويض من (1) في (2): $\therefore \frac{F_2}{2} = \left(\frac{F_2}{2} - 10\right)$

$$\therefore \frac{F_2}{2} = \frac{F_2}{2} - 10 \quad \therefore \frac{F_2}{2} = 10$$

$$\therefore F_2 = 20 \text{ نيوتن}$$

٢٦

الحل

١) القوتان (9، 9) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

حيث $\vec{u} = 9 \times 9 = 81$ نيوتن.سم

\therefore المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه

$$= 20 \text{ نيوتن.سم}$$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواج قياسه الجبرى

$$= \pm 20 \text{ نيوتن.سم}$$

\therefore القوتان (3، 3) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

(ج)

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

\therefore مركز ثقل المجموعة يقع على z وليكن h .

$$\text{حيث } 6 \times h = 12 \times h$$

$$\therefore h = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$\therefore h = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

٢٧

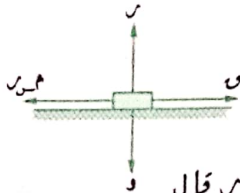
الحل

$$\therefore \vec{u} = \vec{v}$$

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$



٢٨

الحل

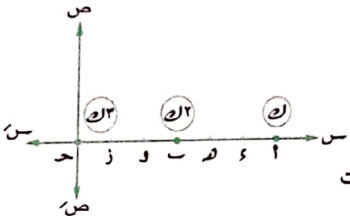
بفرض أن \vec{u}

وضع على محور السينات

بحيث h هي نقطة الأصل

$$\therefore \vec{u} = \frac{0 \times 2 + 12 \times 2 + 6 \times 6}{6} = 12$$

أى عند (9)



٢٩

الحل

\therefore القضيب متزن

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} = 0 \times 50 = 0$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v}$$

٣٠

الحل

من هندسة الشكل:

$$(0, 10, 0) = \vec{u}, (10, 0, 0) = \vec{v}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$(20, 0, 0) = (0, 10, 0) \times (0, 0, 20)$$

∴ نفرض أن كتلة المستطيل بـ ل حـ م = كـ
، نفرض أن كتلة المستطيل أـ حـ ع = ءـ كـ
ويفرض الاتجاهين المتعامدين أـ بـ ، أـ عـ

الكتلة	كـ	كـ
س	٩	٦
ص	٦	٤

$$\therefore \text{س} = \frac{6 \times 4 + 9 \times 6}{6 + 9} = 7.2$$

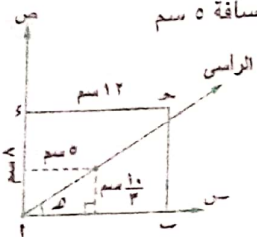
$$\text{ص} = \frac{4 \times 6 + 9 \times 4}{6 + 9} = 5.3$$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى (٥ ، ١/٣)

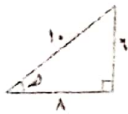
أي أنه : مركز الثقل يبعد عن أـ مسافة ٥ سم

، عن بـ مسافة ١/٣ سم

$$\text{طاله} = \frac{1/3}{5} = \frac{2}{3}$$



التموذج الحادي عشر



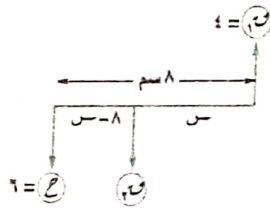
$$\text{حـ} = \text{طاله} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

١

الحل

٢

الحل



$$\text{و} = 4 + 6 = 10 \text{ كجم}$$

$$(8 - 8) \times 10 = 8 \times 4$$

$$10 - 80 = 22$$

$$\therefore \text{س} = 4.8 \text{ سم}$$

٢

الحل

$$\vec{J} = \vec{A} \times \vec{B} = (1, 2) \times (0, 2) = 17 \text{ كـ}$$

٤

الحل

$$\vec{J} = 70 \times 100 \text{ مـ} = 7000 \text{ نيوتن.سم}$$

$$= 30 \text{ نيوتن.متر}$$

٢٧

الحل

$$\text{أولاً : ع} = 8 + 5 = 13 \text{ نيوتن}$$

$$\text{حـ} \times 5 =$$

$$\text{حـ} \times 8 =$$

$$8 = (39 - \text{س})$$

$$\therefore 8 - 312 = \text{س} - 8$$

$$\therefore 312 = 13 \text{ س}$$

$$\therefore \text{س} = 24 \text{ سم}$$



ثانياً : ∴ المحصلة تتحرك 8 وحدات

$$\therefore 8 - 24 = \text{حـ}$$

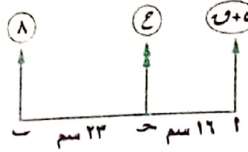
$$16 \text{ سم}$$

$$\text{حـ} = 23 \text{ سم}$$

$$\therefore (16) (8 + 5) = 23 \times 8$$

$$\therefore 184 = 16 + 80$$

$$\therefore 16 = 6.5 \text{ نيوتن.}$$



٢٨

الحل

∴ القوى متزنة

∴ عـ = صفر

$$\therefore \frac{3\sqrt{2} \times 40}{2} \times \text{و} = 3\sqrt{2} \times 40 \times 200$$

$$\therefore \text{و} = 600 \text{ نيوتن.}$$

٢٩

الحل

$$\therefore 60 = 9 \times \text{و}$$

$$\therefore \text{عزم و حول و} = 60$$

$$\therefore 40 = 2 \times \text{و}$$

$$\therefore \text{عزم و حول ب} = 40$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{9 + 2}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore 2 = 9$$

$$\therefore 2 + 2 = 4$$

٢٠

الحل

مساحة المستطيل بـ ل حـ م : مساحة المستطيل أـ حـ ع

$$8 \times 12 : 4 \times 6 =$$

$$4 : 1 =$$



٥ ب

الحل

نفرض أن المسافة بين القوتين = س

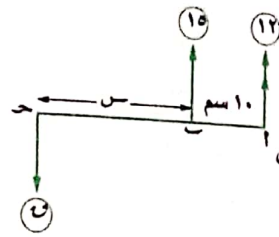
مجموع عزوم القوى حول ح

= عزم المحصلة حول ح

$$\therefore 12 \times (س + 10) = س \times 10$$

$$12 \times 12 = س + 10$$

$$\therefore س = 40 \text{ سم}$$



٩ د

الحل

من معادلات الاتزان :

$$س + س = 60$$

$$س = 2 \times س = 40$$

من (١)، (٢) : $\therefore س = 40$ نيوتن ، $س = 20$ نيوتن.

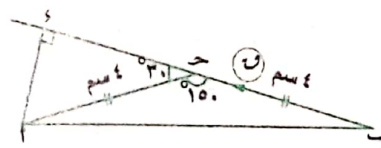
\therefore ضم 40 نيوتن.

(١)

(٢)

١٠ ب

الحل



$$س = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$س \times 10 = 2 \times 1$$

$$20 \times 10 = 2 \times 200$$

٦ ا

الحل

• بالنسبة للنقطة ح :

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (3, 2) - (2, 0) = (1, 2)$$

$$\therefore \vec{r} = (1, 2) = (3 \times 1 + 4 \times 2) = 11$$

• بالنسبة للنقطة و :

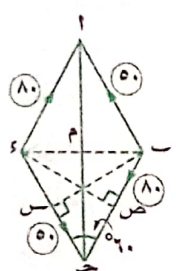
$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (1, 2) - (2, 0) = (-1, 2)$$

$$\therefore \vec{r} = (-1, 2) = (3 \times 1 - 4 \times 2) = -5$$

$$\therefore \vec{r} = -5 = -5 \times 2 = -10$$

١١ د

الحل



$$س = س = 12 \text{ ح } 6 = 72$$

\therefore القوتين (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجاً

قياسه الجبرى (ع)

$$\therefore س = 3 \times 200 = 600$$

\therefore القوتين (٨٠ ، ٨٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$\therefore س = 3 \times 480 = 1440$$

$$\therefore س = 3 \times 480 - 3 \times 200 = 840$$

$$\text{معيار عزم الازدواج} = 3 \times 180 = 540$$

٧ د

الحل

$$س = 30 \text{ ح } 3 = 90$$

$$\therefore س = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

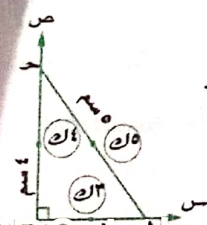
١٢ د

الحل

$$ل = \frac{\| \vec{r} \|}{\| \vec{u} \|} = \frac{\sqrt{7^2 + 21^2}}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 7$$

١٣ ا

الحل



باتخاذ الاتجاهين المتعامدين \vec{u} ، \vec{v}

$$4 : 3 : 4 = 4 : 3 : 4$$

$$5 : 4 : 3 =$$

٨ د

الحل

$$\therefore \vec{r} = (1, 2) - (0, 4) = (1, -2)$$

$$(1, -2, 4) =$$

\therefore عزم القوة \vec{r} بالنسبة للنقطة (ب)

$$= \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{u} & \vec{v} \\ 1 & 2 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$



١٩

الحل

مساحة Δ م ل

مساحة المربع أ ب ح د

$$48 \times 48 : 24 \times 24 \times \frac{1}{4} = 8 : 1 =$$

$$\therefore \text{كتلة المثلث أ م ل} = 40 \times \frac{1}{8} = 5 \text{ جم}$$

$$\text{ومركز ثقله} = \left(\frac{48 + 48 + 24}{3}, \frac{48 + 48 + 24}{3} \right) = (40, 40)$$

\therefore الكتلة عند ب = 10 جم ، عند د ، ح = 5 جم

ل	ب	ح	د	المربع	المثلث
10	5	5	5	40	5
48	0	0	0	24	40
0	0	0	0	24	40

$$\therefore \text{س م} = \frac{248}{11} = \frac{40 \times 5 - 24 \times 40 + 48 \times 10}{5 - 40 + 5 + 5 + 10}$$

$$\text{ص م} = \frac{200}{11} = \frac{40 \times 5 - 24 \times 40 + 48 \times 5}{5 - 40 + 5 + 5 + 10}$$

$$\therefore \text{طاه} = \frac{20}{33}$$

٢٠

الحل

\therefore الجسم على وشك الحركة

\therefore معادلات الاتزان هي

$$س + و م ا 60^\circ = و$$

$$\therefore س = و - و م ا 60^\circ$$

$$\text{ح م} = و م ا 60^\circ$$

$$\therefore \text{ح م} = \frac{1}{3} و \quad \therefore \text{ح م} = س = \frac{1}{3} و$$

$$\therefore \text{ط ا} 30^\circ = (و - و م ا 60^\circ) \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} و = و - و م ا 60^\circ \quad \therefore \frac{1}{3} و = و$$

$$\therefore \frac{1}{3} و = و$$

$$\therefore \text{و م ا} 30^\circ = و$$

$$\text{ومنها} س = و - و م ا 60^\circ = و - و م ا 30^\circ = و - و م ا 30^\circ = و$$

$$\therefore س = \sqrt{\left(و م ا 30^\circ \right)^2 + \left(و م ا 60^\circ \right)^2} = \sqrt{و^2 + و^2} = و \sqrt{2}$$

$$\therefore س = و$$

\therefore الإجابة (ج) هي الإجابة الخطأ

٢١

الحل

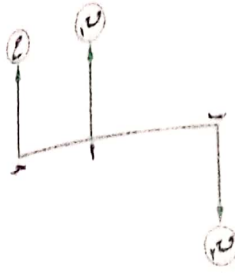
$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{3} و$$

$$\therefore و < و م$$

$\therefore و م$ متضادين في الاتجاه

\therefore ح تقسم أ ب بنسبة 2 : 2

$$\therefore س ح : أ ح = 2 : 3$$



٢٢

الحل

$$100 = س - \frac{1}{4} \times 20 + س \times 2 - س \times 3 \sqrt{2} \times 10$$

$$\therefore 100 = س - 5 + 2س - 30\sqrt{2}س$$

$$\therefore 100 = س - 5 + 2س - 30\sqrt{2}س$$

$$\therefore س = 20 \text{ سم}$$

٢٣

الحل

$$\therefore أ : ب : ح : د = 3\sqrt{2} : 6 : 6 : 6 = 3\sqrt{2} : 1 : 1 : 1$$

\therefore النسبة بين القوى تساوي 1 : 1 : 1 : 1

٢٤

الحل

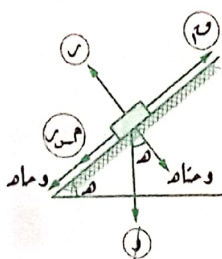
$\therefore و م$ أكبر قوة في

اتجاه خط أكبر ميل

لأعلى وتحافظ على التوازن

\therefore الجسم على وشك

الحركة لأعلى



$$\therefore و م = ح م س + و م ا$$

$\therefore و م$ أقل قوة في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى وتحافظ على

التوازن

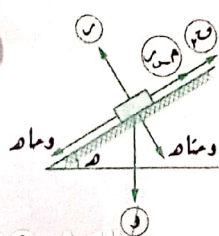
\therefore الجسم على وشك الحركة لأسفل

$$\therefore و م + ح م س = و م ا$$

$$\therefore و م = و م ا - ح م س$$

من (1) ، (2) :

$$\therefore و م = و م ا - 2 و م ا$$



إجابات نماذج الامتحانات التدريبية

∴ العزوم حول محور س = ص ع - ع ص
 $50 \times 30 - 30 \times 40 =$
 $1328,42 \text{ نيوتن.سم}$



من الرسم نجد أن المحصلة تتحرك
 من ح إلى ح' مسافة
 $\frac{1}{4} =$

النموذج الثاني عشر

١

الحل

$$\vec{r} \times \vec{F} = (1, 2) \times (3, -1) = \vec{r} \times \vec{F} = 10 \hat{k}$$

٢

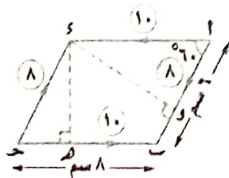
الحل

$$20 = 10 + 10 \quad \therefore 7 \text{ نيوتن}$$

∴ القوة الصغرى = 14 نيوتن.

٣

الحل



$$\therefore 6 \text{ م.} = 60^\circ$$

$$= 3 \sqrt{2} \text{ سم}$$

$$8 \text{ م.} = 80^\circ = 3 \sqrt{2} \text{ سم}$$

∴ القوتين (10, 10) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

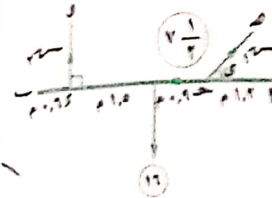
$$\therefore \text{ج.} = 3 \sqrt{2} \times 10 = 3 \sqrt{2} \times 20 = 3 \sqrt{2} \text{ نيوتن.سم}$$

∴ القوتين (8, 8) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\therefore \text{ج.} = 3 \sqrt{2} \times 8 = 3 \sqrt{2} \times 22 = 3 \sqrt{2} \text{ نيوتن.سم}$$

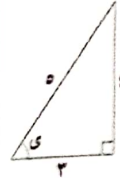
$$\therefore \text{ج.} = 3 \sqrt{2} + 3 \sqrt{2} = 3 \sqrt{2} \text{ نيوتن.سم}$$

$$\therefore \parallel \vec{r} \parallel = 3 \sqrt{2} \text{ نيوتن.سم}$$



(١)

(٢)



(٣)

$$\therefore \text{سم م.} + \text{سم م.} = 16$$

$$\therefore \text{سم م.} = 2,4 \times \text{سم م.} = 2,4 \times 11 = 26,4 \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{سم م.} = \frac{2,4 \times 11}{2,4} = 11 \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{سم م.} = 10$$

$$\therefore \text{سم م.} = \frac{2}{15} \times 10 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{سم م.} = \frac{4}{3}$$

١

٢

الحل

∴ مركز ثقل المجموعة قبل تحرك الكتلة 4 كجم يقسم 2

$$\text{نسبة 1 : 2} \quad \text{كجم 2} \quad \text{كجم 4}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{\text{سم}}{\text{سم}} \quad \text{سم م.} = 10 \text{ سم}$$

بعد تحرك الكتلة 4 كجم مسافة 5 سم فى اتجاه 2 فإن

الكتلة 2 كجم يجب أن تتحرك مسافة 5 سم فى اتجاه 2

$$\text{حتى لا يتغير مركز ثقل المجموعة ويكون } \frac{1}{2} = \frac{\text{سم} + 5}{\text{سم} + 5}$$

$$\therefore 10 \text{ سم} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore 10 \text{ سم فى اتجاه 2}$$

٣

الحل

من هندسة الشكل :

$$(30, 40, 50) = 1$$

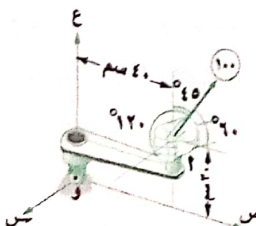
$$\therefore 100 \text{ م.} = 120^\circ$$

$$50 - =$$

$$\therefore 100 \text{ م.} = 60^\circ$$

$$\therefore 100 \text{ م.} = 40^\circ$$

$$\therefore \vec{r} = (30, 40, 50)$$





١٠
ب
الحل

∴ ج = صفر

$$∴ ٦٨ + ٨ \times ٧ = ١٠٠$$

$$\text{صفر} = \frac{٨}{١٧} \times ١٥ \times ٤٤ + \frac{١٥ \times ٨}{١٧} \times$$

$$∴ ٨ - ٧ + ٤٨٠ + ٥٢٨ = \text{صفر}$$

$$∴ ١٠٠٨ = ٧٨ \quad ∴ ١٢٦ = \text{ج. ث. جم}$$

١١
ب
الحل

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \vec{A} = ٢ \text{ ص} + ٦ \text{ س} \quad \vec{B} = ٣ \text{ ص} + ٩ \text{ س}$$

$$∴ \vec{C} = ٥ \text{ ص} + ١٥ \text{ س}$$

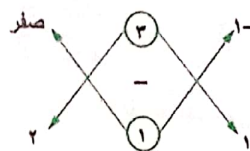
$$\vec{C} = ٥ \text{ ص} + ١٥ \text{ س} = ٥ \sqrt{١٠} \text{ ص} + ١٥ \sqrt{١٠} \text{ س}$$

∴ القوتان \vec{A} و \vec{B} متوازيتان

ومتضادتان في الاتجاه

وبفرض أن خط عمل المحصلة

يقطع \vec{AB} في نقطة ح (س، ص)



$$∴ \text{ح تقسم } \vec{AB} \text{ من الخارج بحيث } \frac{٢}{١} = \frac{١٥}{٥}$$

$$∴ \text{س} = \frac{(١ -) \times ١ - ١ \times ٢}{١ - ٢} = ٣ \quad \text{ص} = \frac{٠ \times ١ - ٢ \times ٢}{١ - ٢} = ٤$$

$$∴ \text{ح} = (٣, ٤)$$

١٢
ب
الحل

• عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأسفل:

$$∴ \text{س} + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$\text{س} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ ١٠ + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا} \times \text{م} = ٤٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ \text{م} = \frac{١٠ - ٤٠}{٤٠} = ٠,٢٥$$

(١)

• عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأعلى:

$$∴ \text{س} + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$\text{س} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

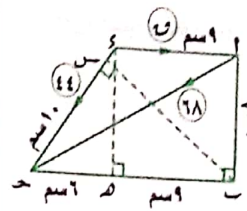
$$∴ ٤٠ + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا} \times \text{م} = ١٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ \text{م} = \frac{٤٠ - ١٠}{١٠} = ٣$$

(٢)

$$\text{من (١)، (٢) ينتج أن: } \frac{١٠ - ٤٠}{٤٠} = \frac{٤٠ - ١٠}{١٠}$$

OPPO



١٣
ب
الحل

∴ ج = صفر

$$∴ ٦٨ + ٨ \times ٧ = ١٠٠$$

$$\text{صفر} = \frac{٨}{١٧} \times ١٥ \times ٤٤ + \frac{١٥ \times ٨}{١٧} \times$$

$$∴ ٨ - ٧ + ٤٨٠ + ٥٢٨ = \text{صفر}$$

$$∴ ١٠٠٨ = ٧٨ \quad ∴ ١٢٦ = \text{ج. ث. جم}$$

١٤
ب
الحل

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \vec{A} = ٢ \text{ ص} + ٦ \text{ س} \quad \vec{B} = ٣ \text{ ص} + ٩ \text{ س}$$

$$∴ \vec{C} = ٥ \text{ ص} + ١٥ \text{ س}$$

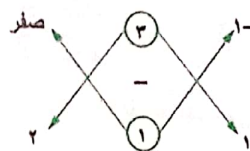
$$\vec{C} = ٥ \text{ ص} + ١٥ \text{ س} = ٥ \sqrt{١٠} \text{ ص} + ١٥ \sqrt{١٠} \text{ س}$$

∴ القوتان \vec{A} و \vec{B} متوازيتان

ومتضادتان في الاتجاه

وبفرض أن خط عمل المحصلة

يقطع \vec{AB} في نقطة ح (س، ص)



$$∴ \text{ح تقسم } \vec{AB} \text{ من الخارج بحيث } \frac{٢}{١} = \frac{١٥}{٥}$$

$$∴ \text{س} = \frac{(١ -) \times ١ - ١ \times ٢}{١ - ٢} = ٣ \quad \text{ص} = \frac{٠ \times ١ - ٢ \times ٢}{١ - ٢} = ٤$$

$$∴ \text{ح} = (٣, ٤)$$

١٢
ب
الحل

• عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأسفل:

$$∴ \text{س} + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$\text{س} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ ١٠ + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا} \times \text{م} = ٤٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ \text{م} = \frac{١٠ - ٤٠}{٤٠} = ٠,٢٥$$

(١)

• عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأعلى:

$$∴ \text{س} + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

$$\text{س} = ٥٠ \text{ ح.ا}$$

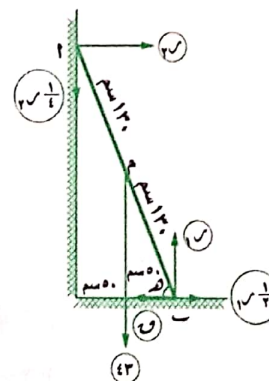
$$∴ ٤٠ + \text{م} = ٥٠ \text{ ح.ا} \times \text{م} = ١٠ \text{ ح.ا}$$

$$∴ \text{م} = \frac{٤٠ - ١٠}{١٠} = ٣$$

(٢)

$$\text{من (١)، (٢) ينتج أن: } \frac{١٠ - ٤٠}{٤٠} = \frac{٤٠ - ١٠}{١٠}$$

OPPO



معادلات الاتزان:

$$\text{س} = \frac{١}{٤} \text{ س} + ٤٣$$

$$\text{س} = \frac{١}{٤} \text{ س} + ٤٣$$

ج = صفر

$$٤٣ = \frac{١}{٤} \text{ س} + ٤٣ \quad \text{س} = ١٠٠ \text{ نيوتن}$$

$$٢١٥ = \frac{١}{٤} \text{ س} + ٤٣ \quad \text{س} = ١٠٠ \text{ نيوتن}$$

$$\text{ومن معادلة (١): } \text{س} = \frac{١}{٤} \times ٤٣ + ١٠ = ٤٥,٥ \text{ نيوتن}$$

$$\text{س} = \frac{١}{٤} \times ٤٥,٥ + ١٠ = ٢٢,٧٥ \text{ نيوتن}$$

١٧

الحل

عندما يكون الشد

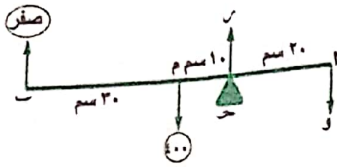
عند س على

وشك الانعدام

∴ مح = صفر

$$∴ -9 \times 20 + 10 \times 40 = \text{صفر}$$

$$∴ 200 = 9 \text{ ث.جم}$$



١٨

الحل

$$4 = 20 \times \sqrt{2}$$

$$4 = 10 \times \sqrt{2}$$

∴ الصفحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ (200, 2) تكون ازدواجاً قياسه

الجبرى - 1000 ث.جم.سم

$$∴ -200 \times 4 \text{ م.ه} = -1000$$

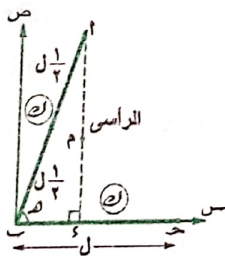
$$∴ -200 \times 10 \times \sqrt{2} \text{ م.ه} = -1000$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ م.ه}$$



١٩

الحل



الكتلة	ل	ل
س	$\frac{1}{4} \text{ ل م.ه}$	$\frac{1}{4} \text{ ل}$
ص	$\frac{1}{4} \text{ ل م.ه}$	٠

$$\text{س م} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ل} \times \frac{1}{4} \text{ ل م.ه} + \frac{1}{4} \text{ ل} \times \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}}{\frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{4} \text{ ل}} = \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}$$

$$\text{ص م} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ل} \times \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}}{\frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{4} \text{ ل}} = \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}$$

∴ س ح أفقيًا.

$$\text{∴ م.ه} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ل} \times \frac{1}{4} \text{ ل م.ه} + \frac{1}{4} \text{ ل} \times \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}}{\frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{4} \text{ ل}} = \frac{1}{4} \text{ ل م.ه}$$

$$\text{∴ م.ه} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{4} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل م.ه}$$

$$\text{∴ م.ه} = \frac{1}{4}$$

$$\text{∴ م.ه} = \frac{2}{4} \text{ ل}$$

$$\frac{1}{4} = \theta \text{ ما} \therefore 0 = \theta \text{ ما} \therefore 0 = \theta \text{ ما}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{10 - 20 \times 0}{20 \times 0} = \text{ما} \therefore 0 = \theta \text{ ما}$$

١٢

الحل

$$(4, 3) \times (3, 1) = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \therefore$$

$$\vec{w} = 13 - \vec{e} = (9 - 4) =$$

$$L = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{13}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{13}{5} = 2.6 \text{ وحدة طول}$$

١٤

الحل

$$ج = 40 \times 50 = 2000 \text{ نيوتن.سم} = 20 \text{ نيوتن.متر}$$

١٥

الحل

$$\text{من هندسة الشكل: } 1 = (2, 2, 0), 2 = (0, 2, 1), 3 = (2, 0, 1)$$

$$\therefore \vec{1} = \vec{2} - \vec{3} = (2, 2, 0) - (2, 0, 1) = (0, 2, -1)$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} = \frac{(2, 0, 1) \times (0, 2, -1)}{\sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (1)^2}} = \frac{(2, 1, 2)}{\sqrt{5}}$$

$$(28, 0, 14) =$$

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = (28, 0, 14) \times (2, 2, 0) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 2 & 2 & 0 \\ 28 & 0 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \vec{u} + 28 \vec{v} - 56 \vec{w}$$

١٦

الحل

الكتلة	٤	٥	٣
س	٠	١٢	٦
ص	٠	٠	$\sqrt{2} 6$

$$\text{س م} = \frac{6 \times 3 + 12 \times 5 + 0 \times 4}{3 + 5 + 4} = \frac{90}{12} = 7.5$$

$$\text{ص م} = \frac{\sqrt{2} 6 \times 3 + 0 \times 5 + 0 \times 4}{3 + 5 + 4} = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

(१)

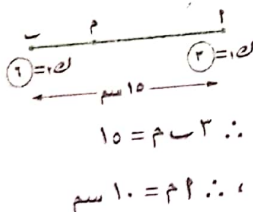
(o)

$$\begin{aligned} & \text{مقام } 2 - \left(\frac{4}{13} \right) \text{ مقام } - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{13} \right) \text{ مقام} \\ & \text{مقام} - \frac{4}{13} \text{ مقام} - \frac{2}{13} \text{ مقام} \\ & \frac{11}{13} \text{ مقام} = \frac{4}{13} \text{ مقام} \\ & \frac{4}{11} = \text{مقام} \end{aligned}$$

⑦ ⑧



الحل



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$3 - 2 = 1 \therefore$$

$$5 - 3 = 2 \therefore$$

الحل

بأخذ العزم حول نقطة الأصل

$$\begin{vmatrix} \overline{\varepsilon} & \overline{\nu} & \overline{\psi} \\ 2- & 2 & 1- \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{ج.}$$

$$\frac{1}{6}(6 - \cancel{1}) + \frac{1}{3}2 - \frac{1}{3}(\cancel{1} + 2) =$$

$$2 - \cancel{1} \therefore \quad 2 - \cancel{1} = 2 + 2 \therefore$$

① ②

الحل

• بالنسبة للنقطة ح :

$$\begin{aligned}(1-, 2-) &= (2, 2) - (2, \cdot) = \overline{2} - \overline{2} = \overline{0} = \overline{2} \\ \overline{2}(2 \times 1 + 2 - \times 2-) &= \overline{2} \overline{2} \therefore \\ \overline{2} 11 &= \overline{2}(2 + 1) = \overline{2} \therefore\end{aligned}$$

النموذج الثالث عشر



الحل
 $r^2(30) + r^2 = r^2(50) \therefore$
 $r^2 = r^2 + r^2$
 $\therefore r = 40$
 $\therefore r = 40$

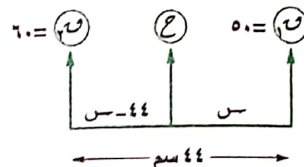


الحل

الحل
ع. 10 = 0.2 × 10³ = 200 نيوتن. متر.



الحل



$ج = ۱۱۰ = ۵۰ + ۶۰$ ث.جم
 $۵۰ \times ۶۰ = (۶۰ - ۴۴) \times ۶۰$
 $۵۰ \times ۶۰ = ۲۶۴۰ - ۶۰$
 $\therefore ۵۰ = ۲۶۴۰ - ۶۰$
 $\therefore ۵۰ = ۲۵۸۰$ سم

① ②

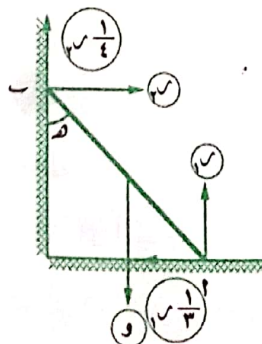
الحل

$\therefore \text{ازدواجان متوازن}$
 $\therefore \hat{E}_2 = \hat{E}_1 - \hat{E}_2 = \hat{E}_1 \therefore$
 $\hat{E}_4 = (20 -) - 20 = \hat{E}_1 - \hat{E}_2 \therefore$

7.

الحل

نفرض أن طول القضيب ٢ ل ويميل على الرأسى بزاوية هـ
من معادلات الاتزان :



(۱) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
 (۲) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
 بالتعويض من (۱) في (۲):
 $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2}$



∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً أو مترنه

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(1, 0, -) \times (2, 3, 4) + (4, -1, 8) \times (1, 1, 1) =$$

$$\vec{0} = \vec{0} (10 + 3 + 8 + 4) =$$

∴ المجموعة تمثل ازدواجاً معيار عزمه = 17 وحدة عزم.

١٤ ك

الحل

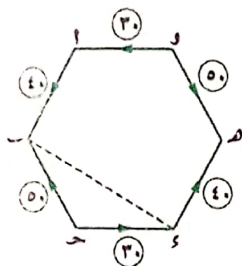
∴ القوتين (٤٠، ٤٠)

تكونان ازدواجاً قياسه

الجبرى (ج)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 10 \times 40 = 400$$

$$= 400 \text{ نيوتن.سم}$$



∴ القوتين (٥٠، ٥٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 10 \times 50 = 500 \text{ نيوتن.سم}$$

∴ القوتين (٣٠، ٣٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 10 \times 30 = 300 \text{ نيوتن.سم}$$

$$= 300 \text{ نيوتن.سم}$$

١٥ ب

الحل

$$\vec{a} \times \vec{b} = 80 \text{ نيوتن.متر}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 80 \times \frac{35}{100} = 28 \text{ نيوتن}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 298, 38 \text{ نيوتن}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 298, 38 \times \left(\frac{27}{100} + \frac{35}{100} \right) = 149, 77 \text{ نيوتن.م}$$

$$= 149, 77 \text{ نيوتن.م} \approx 150 \text{ نيوتن.م}$$

١٦ ب

الحل

مركز ثقل المجموعة

$$\left(\frac{1+4+1}{3}, \frac{4+3+2}{3} \right) =$$

$$(2, 3) =$$

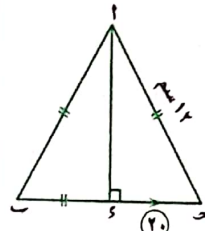
• بالنسبة للنقطة م :

$$(2, 0) = (1, 0) - (2, 0) = \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{f}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{f}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{f}$$



١٠ ا

الحل

$$3 \times 6 = 18 \text{ سم}$$

$$3 \times 6 \times 20 = 360$$

$$= 360 \text{ نيوتن.سم}$$

١١ ب

الحل

∴ المجموعة من القوى تكون ازدواج

١، ٢، ٣، ٤ ليست على استقامة واحدة

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{f}$$

$$120 = 10 \times 12 = 120$$

$$120 = 10 \times 12 = 120$$

$$120 = 10 \times 12 = 120$$

$$120 = 10 \times 12 = 120$$

١٢ ب

الحل

قبل تحريك القوة ق

$$1 \times 4 = 4 \text{ سم}$$

بعد تحريك القوة ٣ مسافة ل فى اتجاه ب

وبفرض أن المحصلة تتحرك مسافة ص

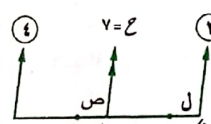
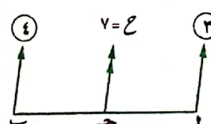
فى نفس الاتجاه

$$1 \times 4 = 4 \text{ سم}$$

$$(1+4+1) \times 4 = (1+4+1) \times 4$$

$$(1+4+1) \times 4 = (1+4+1) \times 4$$

$$(1+4+1) \times 4 = (1+4+1) \times 4$$



١٣ ا

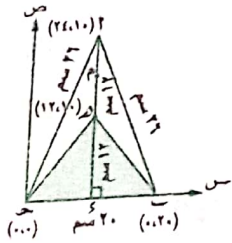
الحل

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} =$$

$$= (1+4+1) \times 4 = (1+4+1) \times 4$$

٢٠ ج

الحل



نختار الاتجاهين المتعامدين
ح س ، ح ص وذلك
باعتبار ح هي نقطة الأصل.

من هندسة الشكل :

$$24 = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.3 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ح س ح ص} = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200$$

$$240 = 2 \text{ سم}$$

$$\text{ومركزه} = \left(\frac{24 + 0 + 0}{3}, \frac{0 + 0 + 20}{3} \right) = (8, 10)$$

$$\text{ومساحة المثلث ح س ح ص} = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200$$

$$\text{ومركزه} = \left(\frac{12 + 0 + 0}{3}, \frac{0 + 20 + 0}{3} \right) = (4, 10)$$

الكتلة	٢٤٠	١٢٠
س	١٠	١٠
ص	٨	٤

$$10 = \frac{10 \times 120 - 10 \times 240}{120 - 240} = 10 \text{ سم}$$

$$12 = \frac{4 \times 120 - 8 \times 240}{120 - 240} = 12 \text{ سم}$$

∴ ه هي مركز ثقل الجزء الباقي

أي اه : البعد يساوي صفر.

٢١ ب

الحل

∴ الجسمان مصنوعان من نفس المادة وموضوعان على نفس المستوى.

$$m_1 = m_2$$

بالنسبة للوزن (و)

$$m_1 = m_2 \text{ و } w_1 = w_2 \text{ و } m_1 = m_2 \text{ و } w_1 = w_2$$

، بالنسبة للوزن (ه)

$$m_1 = m_2 \text{ و } w_1 = w_2 \text{ و } m_1 = m_2 \text{ و } w_1 = w_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

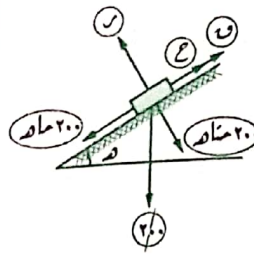
$$w_1 = w_2$$

$$m_1 = m_2$$

$$w_1 = w_2$$

١٧ ب

الحل



$$N > 200 \text{ ما}$$

∴ قوة الاحتكاك لأعلى المستوى

$$N + 200 = 200 \text{ ما}$$

$$N + 70 = 200 \text{ ما}$$

$$N = 130 \text{ ما}$$

١٨ أ

الحل

في الحالة الأولى :

∴ القضيبي على وشك

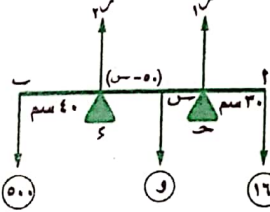
الدوران حول ح

$$0 = \sum \tau$$

$$0 = 30 \times 160 - 40 \times 80$$

$$S = 4800$$

(١)



في الحالة الثانية :

∴ القضيبي على وشك

الدوران حول د

$$0 = \sum \tau$$

$$0 = 40 \times 80 - (30 + 200) \times 160$$

$$(2) \quad 2000 = 50 + 50 + 50 + 12800$$

وبالتعويض من (١) : $7200 = 4800 - 50$

$$N = 2400 \text{ ما}$$

١٩ ب

الحل

$$H = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.3 \text{ سم}$$

$$H = 28.3 \text{ سم}$$

∴ الصفيحة متزنة تحت تأثير

ازدواج قياسه الجبرى

٧٥٠٠ ث.جم.سم

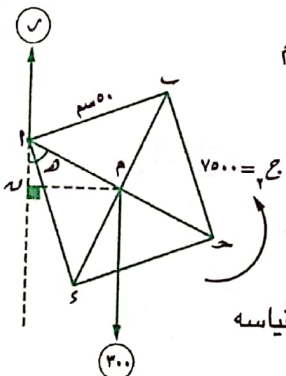
∴ (ر ، ٣٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه

الجبرى - ٧٥٠٠ ث.جم.سم

$$m = 300 \text{ ث.جم}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{H}{20} \quad 7500 = 20 \times 28.3 \text{ ما}$$

$$\therefore H = 40 \text{ أو } 130$$



(٢)

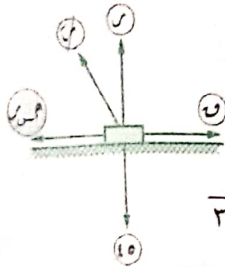
$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض من (٢) في (١) :

$$14 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + 14$$

$$\therefore \frac{2}{3} = 14 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} = 14.5 \Rightarrow 2 = 14.5 \times \frac{3}{2} = 21.75 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 14.5 + 0.5 = 15 \text{ نيوتن}$$



٢٨

الحل

$$\therefore F = 15$$

$$F \cos 30^\circ = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.99 \text{ سم}$$

$$F \sin 30^\circ = 15 \times \frac{1}{2} = 7.5 \text{ سم}$$

$$\therefore F \cos 30^\circ = 12.99 + 7.5 = 20.49 \text{ سم}$$

٢٩

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{A} = (0, 18, 0) \text{ سم} , \vec{B} = (0, 18, 16) \text{ سم}$$

$$\vec{C} = (24, 0, 0) \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0, 18, 16) - (0, 18, 0) = (0, 0, 16) \text{ سم}$$

$$= (24, 18, 0) \text{ سم}$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (0, 18, 16) - (0, 18, 0) = (0, 0, 16) \text{ سم}$$

$$= (0, 0, 16) \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{(24, 18, 0) \cdot (0, 0, 16)}{\sqrt{(24)^2 + (18)^2 + (0)^2} \cdot \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (16)^2}} \times 160 = \frac{0}{\sqrt{900} \cdot 16} \times 160 = 0$$

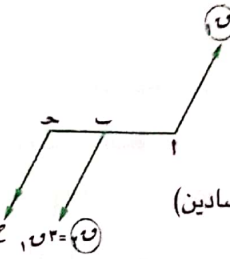
$$= (64, 48, 0) \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (64, 48, 0) \cdot (0, 0, 16) = 0 + 0 + 16 \times 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 64 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 64 \times 48 \times 16 = 50176$$

$$= 1024 \sqrt{768} + 1024 = 1024 \sqrt{768} + 1024$$

$$\therefore \text{مقدار عزم القوة حول } B = \sqrt{(1024)^2 + (1024)^2} = 1448.7 \text{ نيوتن.سم}$$



٢٢

٢٣

٢٤

الحل

$$\therefore \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3$$

$$\therefore \vec{F}_1 = \vec{F}_3 - \vec{F}_2 \text{ (في اتجاهين متضادين)}$$

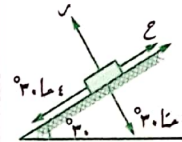
$$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_3 - \vec{F}_2\|$$

$$\therefore \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_3\| = \|\vec{F}_2\|$$

$$\therefore \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_3\| = \|\vec{F}_2\| = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_3\| = \|\vec{F}_2\| = 10 \text{ سم}$$

٢٥



$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore F = 20 \text{ سم}$$

٢٦

٢٧

الحل

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

$$\therefore \vec{F}_1 \text{ في اتجاهين متضادين}$$

٢ ب

الحل

$$ج ر = 2 \times \frac{4}{5} \times 100 - 2 \times \frac{4}{5} \times 100 = 0$$

$$= 460 \text{ نيوتن متر}$$

٢ ا

الحل



من هندسة الشكل :

$$م = \sqrt{(10)^2 - (8)^2} = 6 \text{ سم}$$

$$م ص = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{س ص} = 8 + 6 = 14 \text{ سم}$$

$$\therefore ج = 14 \times 20 = 280 \text{ ث كجم سم}$$

٢ ج

الحل

$$\therefore س = ج = 1.5 \text{ نيوتن ، } م = 8 \text{ نيوتن}$$

$$ج = س = 8 \times \frac{1}{4} = 2 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore ج > ع$$

\therefore الاحتكاك ليس نهائياً.

٢ هـ

الحل

$$ج = \vec{a} \times \vec{b} = (1, -2, 2) \times (2, 2, 1) = (1, -2, 2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

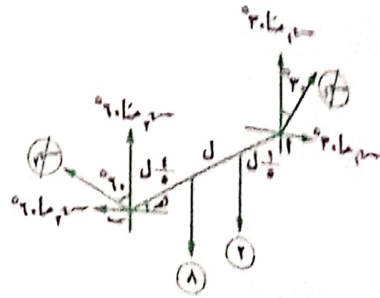
$$\therefore \text{طول العمود من نقطة «س»} = \frac{\|\vec{ج}\|}{\|\vec{ب}\|}$$

$$= \frac{\sqrt{(7)^2 + (5)^2 + (11)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} \approx 7.73 \text{ وحدة طول}$$

٢ ب

٢ ا

الحل



معادلات الاتزان :

$$\sum \tau = 0$$

$$20 \times \frac{10}{2} = 20 \times 10 + 20 \times 5$$

$$10 = 10 + 5$$

من (١) ، (٢) :

$$\therefore \sum F_x = 0 \text{ نيوتن ، } \sum F_y = 0 \text{ نيوتن}$$

ج = صفر

$$\therefore 20 \times \frac{10}{2} \times 2 - 20 \times 10 \times \frac{4}{5} = 0$$

$$- 20 \times 10 \times \frac{4}{5} + 20 \times 10 \times \frac{4}{5} = 0$$

$$\therefore 20 \times 10 \times \frac{4}{5} = 20 \times 10 \times \frac{4}{5}$$

$$\therefore 10 = 10 + 5$$

$$\therefore \frac{20}{3} = 10 \text{ طام}$$

$$\therefore 20 = 0$$

إياه : القضيبي يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30°

النموذج الرابع عشر

٢ ا

الحل

من معادلات الاتزان :

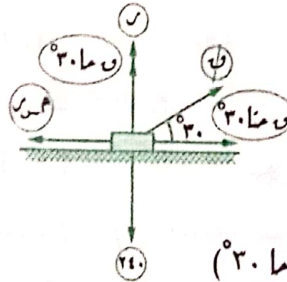
$$\sum \tau = 0$$

$$20 \times 10 = 20 \times 10 + 20 \times 5$$

$$20 \times 10 = 20 \times 10 + 20 \times 5$$

$$\therefore \frac{20}{2} \times (20 - 20) = 0$$

$$\therefore \frac{20}{2} \times 10 = 0$$



$$\therefore 70.86 \text{ ث كجم}$$



٧ ب

الحل

$$\frac{4}{5} = \text{م.م}$$

$$\frac{2}{5} = \text{م.م}$$

∴ القضيبة متزن

$$\therefore \sum \tau = 0$$

$$0 = 40 \times 6 - 20 \times 8 + 40 \times 6 - 20 \times 8$$

$$40 = \frac{4}{5} \times 60$$

$$\therefore 10 = \text{س.م}$$

ومن معادلات الاتزان :

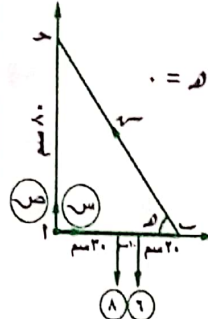
$$\text{ص.م} + \text{س.م} = 8 + 6$$

$$\therefore \text{ص.م} = 14 = \frac{4}{5} \times 10 + \text{ص.م}$$

$$\therefore \text{س.م} = 20 = \frac{2}{5} \times 10 + \text{س.م}$$

$$\therefore \text{مقدار رد فعل المفصل} = \sqrt{\text{ص.م}^2 + \text{س.م}^2}$$

$$= \sqrt{14^2 + 20^2} = 24.4 \text{ نيوتن}$$



٨ ا

الحل

$$\frac{1}{3} = \frac{0 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

٩ ب

الحل

عندما يكون الجسم

على وشك الحركة لأسفل :

$$\text{م.م} = 200 \theta$$

$$80 + \text{م.م} = 200 \theta$$

$$\therefore \frac{80 - 200 \theta}{200 \theta} = \text{م.م}$$

عندما يكون الجسم

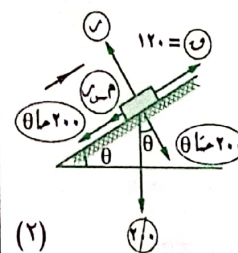
على وشك الحركة لأعلى :

$$\text{م.م} = 200 \theta$$

$$120 + \text{م.م} = 200 \theta$$

$$\therefore \frac{120 - 200 \theta}{200 \theta} = \text{م.م}$$

(١)



(٢)

$$\text{م.م} = 200 \theta - 120 = 80 - 200 \theta \therefore (٢), (١)$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 400 = \theta \times 200$$

$$\therefore 20 = \theta \times 100$$

١١ ب

١٢ ب

الحل

$$\therefore \vec{A} // \vec{B}$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

١٣ ا

الحل

$$\text{ع} = 8 + 2 + 6 + 4$$

$$= 20 \text{ ث.كجم}$$

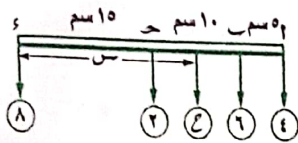
ومجموع عزوم القوى حول النقطة و

= عزم المحصلة حول النقطة و

$$\therefore 20 \times 10 = 10 \times 2 + 20 \times 6 + 20 \times 4$$

$$\therefore 10 = \text{س.م}$$

المحصلة تبعد مسافة ١٥ سم عن النقطة و ، ١٥ سم عن النقطة ٢



١٤ ب

الحل

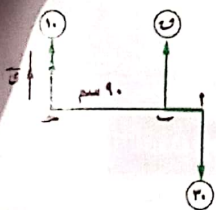
$$10 = 20 - \text{و}$$

$$\therefore 40 = \text{و نيوتن}$$

$$90 \times 40 = (90 + 20) \times 20$$

$$\therefore 120 = 90 + 20$$

$$\therefore 20 = 20$$



١٥ ب

الحل

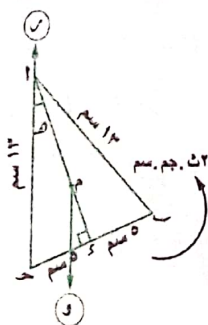
من هندسة الشكل :

$$12 = 20 - 20 \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore 8 = 12 \times \frac{2}{3}$$

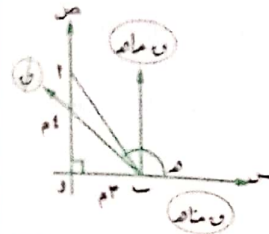
∴ الصفيحة متزنة تحت تأثير

ازدواج معيار عزمه ٢٠٠ ث.كجم سم



القوتان (ر، و) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى
 $200 = 200 \times 10^{-3}$
 $200 = 8 \times 10^{-3} \times 25000$
 $200 = \left(\frac{2}{12}\right) \times 8 \times 10^{-3}$

الحل



ع = صفر
 من تمر بالنقطة
 $84 = 3 \times 2$

(1)

(2)

$100 = 4 \times 2 + 3 \times 2$
 $100 = 4 \times 2 + 3 \times 2$

من (1) و (2):
 $100 = 4 \times 2 + 3 \times 2$

$184 = 4 \times 2 + 3 \times 2$
 $184 = 4 \times 2 + 3 \times 2$

حل آخر:

نفرض أن $\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$84 = 2 \times 2$

$28 = 2 \times 2$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$100 = 4 \times 2 + 3 \times 2$

$16 = 2 \times 2$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

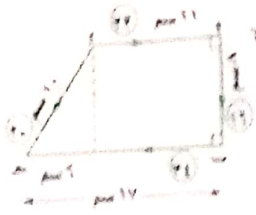
$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

$\vec{r} = \vec{l} + \vec{s}$

16

الحل

القوى تعمل فى اتجاه دورى واحد



$$2 = \frac{2}{1} = \frac{22}{11} = \frac{11}{8} = \frac{22}{11}$$

المجموعة تكافئ ازدواجاً

قياسه الجبرى

$$2 = 2 \times 8 \times 11 = 176$$

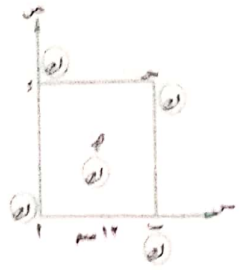
$$2 = 2 \times 8 \times 11 = 176$$

معيار عزم الازدواج = 176

17

الحل

باختيار اتجاهين متعامدين



الكتلة	أ	ب	ج	د	هـ
س	0	12	12	0	6
ص	0	0	12	12	6

$$6 = \frac{6 \times 6 + 12 \times 6 + 12 \times 6}{6}$$

$$6 = \frac{6 \times 6 + 12 \times 6 + 12 \times 6}{6}$$

مركز الثقل = (6, 6)

بعد مركز الثقل عن أ = $\sqrt{6^2 + 6^2} = 8.49$ سم

18

الحل

القوى تكافئ ازدواج

$$0 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$0 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$(0, -2) \times (1, 0) + (1, 1) \times (0, 1) = 0$$

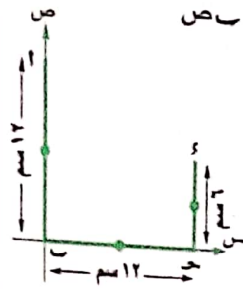
$$0 = 0 + 1 = 1$$

١٩

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين س، ص

في اتجاهي س، ص



الكتل	١٢ ك	٦ ك	١٢ ك
س	٠	١٢	٦
ص	٦	٢	٠

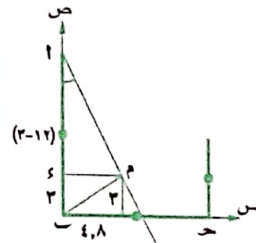
$$س = \frac{٠ \times ١٢ + ١٢ \times ٦ + ٦ \times ١٢}{١٢ + ٦ + ١٢} = ٤,٨$$

$$ص = \frac{٦ \times ١٢ + ٢ \times ٦ + ٠ \times ١٢}{١٢ + ٦ + ١٢} = ٣$$

∴ مركز ثقل السلك يبعد عن أ مسافة ٤,٨ سم

ويبعد عن ب مسافة ٣ سم

عند التعليق من أ :



$$\frac{٤,٨}{٣ - ١٢} = (د أ) م$$

$$٢٨ = (د ب) م$$

٢٢

الحل

$$٢ - ٤ = ٢ - ٤$$

$$٨ - ٤ = ٤$$

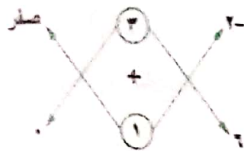
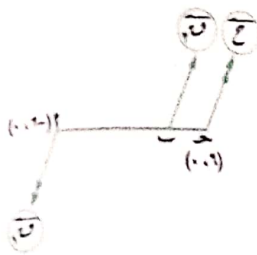
$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٤}{١} = \frac{١}{٢}$$

$$٤ = ١$$

$$\frac{٢}{١} = \frac{١}{٢}$$

$$(٠, ٤) = س$$



٢٣

الحل

(١)

$$٩ \times س = ١ \times ص$$

(٢)

$$١٦ \times س = ١ \times ص$$

$$\frac{٩}{١٦} = \frac{١}{١٦} \quad \text{بقسمة (١) على (٢) :}$$

$$\frac{٩}{١٦} = \frac{١}{١٦} \quad \text{∴} \quad \frac{٩}{١٦} = \frac{١}{١٦}$$

٢٤

الحل

الكتلة	٤٠٠	١٠٠
س	٨	٨
ص	٨	١٦

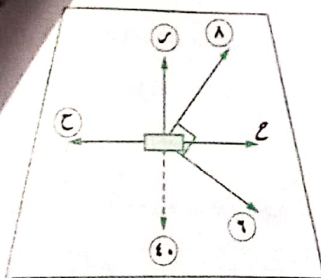
كتلة المربع ٤٠٠ جم عند مركزه

(٨, ٨)

$$٨ = \frac{٨ \times ١٠٠ + ٨ \times ٤٠٠}{١٠٠ + ٤٠٠} = س$$

$$٩,٦ = \frac{١٦ \times ١٠٠ + ٨ \times ٤٠٠}{١٠٠ + ٤٠٠} = ص$$

∴ مركز الثقل يقع عند النقطة (٩,٦, ٨)



٢٥

$$٣٦ + ٦٤ = ع$$

$$١٠ =$$

∴ الجسم متزن

ح (الاحتكاك)

$$٤٠ = ع, ١٠ = ح$$

∴ ح ≥ ع (الجسم متزن)

$$\frac{١}{٤} \leq ع \quad \text{∴} \quad ١٠ \geq ٤٠$$

٢٠

الحل

عندما يكون الرجل عند النقطة أ :

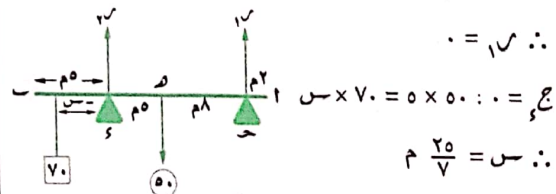
$$٨ \times ٥٠ > ٢ \times ٧٠$$

∴ اللوح يظل متزنًا

عندما يتحرك الرجل مسافة (س) يكون اللوح على وشك

الدوران حول

$$٠ = م$$



$$س = \frac{٢٥}{٧}$$

∴ الرجل يتحرك مسافة = $\frac{٢٥}{٧} + ١٥$

$$= \frac{١٨}{٧} \text{ متر}$$

من الطرف أ دون أن ينقلب اللوح.

٢١

$$\therefore 0.5 \times 1 \text{ م} = 20 \times 0.5 \times 1 \text{ م} \times 0.5 \text{ م}$$

$$\therefore 0.5 \times 1 \text{ م} = 20 \times 0.5 \times 1 \text{ م} \times 0.5 \text{ م}$$

$$\therefore 0.5 \times 1 \text{ م} = 20 \times 0.5 \times 1 \text{ م} \times 0.5 \text{ م}$$

$$\therefore 0.5 \times 1 \text{ م} = 20 \times 0.5 \times 1 \text{ م} \times 0.5 \text{ م}$$

النموذج الخامس عللر

ج ١

الحل

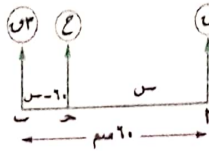
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (2, 0) \times (2, 1) = (2, -2)$$

$$\therefore \text{طول العمود الساقط من } C = \frac{\|\vec{C}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ج ٢

الحل



$$30 \times 60 = 20 \times (60 - x)$$

$$\therefore 30 \times 60 = 20 \times (60 - x)$$

$$\therefore 30 \times 60 = 20 \times (60 - x)$$

ج ٣

الحل

القوتان تكونان ازدواج

$$\therefore \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\therefore 2 = 3, 5 = 4, 9 = 2$$

$$\therefore 1 = 4 + 3 + 2$$

ج ٤

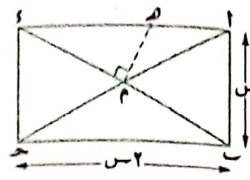
الحل

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ج ٥

الحل

$$\vec{C} = 3 \times (120 + 90 \times \sqrt{2} - 40 \times 30) = 540 \text{ نيوتن سم}$$



١٦ م مركز الثقل ، ه نقطة التعليق

١٧ م رأسي

١٨ م أفقي

١٩ م عمودي

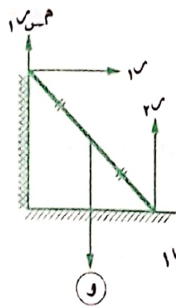
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2, 2) + (2, 2) = (4, 4)$$

$$\therefore \frac{C_x}{A_x} = \frac{C_y}{B_y} \therefore \frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \frac{C_x}{A_x} = \frac{C_y}{B_y} \therefore \frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \frac{C_x}{A_x} = \frac{C_y}{B_y} \therefore \frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \frac{C_x}{A_x} = \frac{C_y}{B_y} \therefore \frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$



ج ٦

الحل

من شروط الاتزان أن

س = صفر

وهذا لا يتحقق في هذه الحالة لأن : س = ١٠

∴ لا يمكن أن يتزن القضيب.

ج ٧

الحل

$$\therefore (د ا ح ب) > (د ا ح ب)$$

$$\therefore (د ا ح ب) > (د ا ح ب)$$

المجموعة تكافئ ازدواج قياسه

$$\text{الجبري} = 4 \times 3 - 2 \times 4 = 12 - 8 = 4$$

$$= (4 - 2) \times 4 = 8 \text{ أكبر من الصفر موجب}$$

ج ٨

الحل

١٩ م رأسي

٢٠ م أفقي

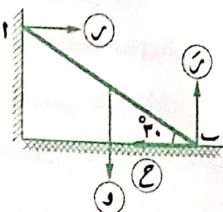
نفرض أن رد الفعل العمودي

عند ه هو م

$$\therefore \vec{r} = \vec{C} = 3 \times 8 = 24$$

$$\therefore \vec{r} = 0$$

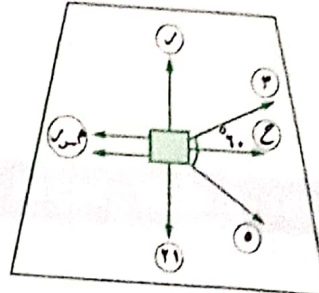
$$\therefore \vec{r} = 0$$





٦

الحل



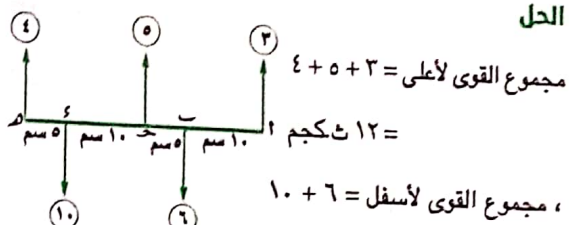
$$ع = \sqrt{\frac{1}{3} \times 5 \times 2 \times 2 + 20 + 23} = 7 \text{ نيوتن}$$

∴ الجسم على وشك الحركة

$$7 = ع \times 21 \therefore ع = \frac{1}{3} \text{ م}$$

٧

الحل



مجموع القوى لأعلى = 3 + 5 + 4 = 12 ث كجم

مجموع القوى لأسفل = 10 + 6 = 16 ث كجم

∴ المحصلة تعمل في الاتجاه لأسفل

$$ع = 16 - 12 = 4 \text{ ث كجم}$$

نفرض أن المحصلة تعمل عند نقطة تبعد مسافة س عن النقطة هـ

∴ مجموع عزوم القوى حول النقطة هـ

= عزم المحصلة حول النقطة هـ

$$3 \times 2 - 20 \times 6 + 10 \times 5 - 5 \times 4 = -$$

$$س = 1.25 \text{ سم}$$

∴ المحصلة تبعد مسافة 1.25 سم عن الطرف هـ

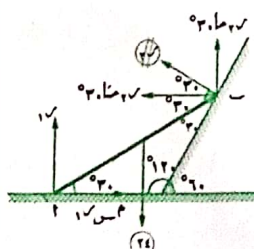
٨

الحل

معادلات الاتزان :

$$(1) ع \times \frac{3}{2} = 18$$

$$(2) 24 = 18 + \frac{1}{3}$$



$$ع = 12$$

$$\therefore -24 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times 18 = ع$$

$$\therefore ع = 12$$

∴ رد فعل المستوى المائل = 12 ث كجم

$$ع = 18 \therefore 24 = 18 + 6$$

$$ع = 18 \therefore 12 \times \frac{3}{2} = 18 \times ع$$

$$\therefore ع = 18$$

$$ع = 18 \therefore 12 \times \frac{3}{2} = 18 \times ع$$

$$ع = 12$$

٩

الحل

من هندسة الشكل :

$$ع = 20$$

∴ القوى تعمل في اتجاه دورى واحد

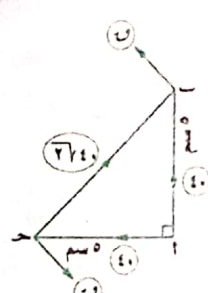
$$ع = \frac{20 \times 4}{20} = 4$$

∴ المجموعة تمثل ازدواجاً القياس الجبرى

لعزمه ع = 2 - مساحة المثلث × 8

$$ع = 20$$

$$ع = 20$$



نفرض القوتين (ع، ع) تعملان عند س، ح تكونان ازدواجاً

قياسه الجبرى ع

$$ع = 20$$

$$ع = 20$$

$$ع = 20$$

١٠

الحل

نفرض أن الثقل الذى يعلق

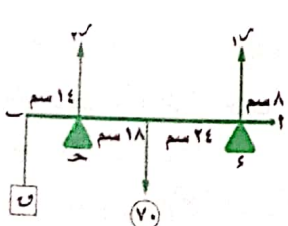
عند النقطة ب ويكون

القضيب على وشك

الانقلاب هـ

$$ع = 18$$

$$ع = 18$$



$$ع = 90$$

بالتعويض في (١) : $\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \epsilon = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

من (٢) : $\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \epsilon = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

١٤

الحل

من هندسة الشكل :

$(0, 2, 0) = \vec{s}, (4, 0, 2) = \vec{a}$

$(4, 2, 2) = \vec{a} - \vec{s} = \vec{a}$

$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \times \vec{s} = \vec{s}$

$\frac{(4, 2, 2)}{\sqrt{(4-)^2 + (2-)^2 + (2-)^2}} \times \sqrt{2} = 10$

$(4, 2, 2) = \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$(4, 2, 2) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

$(4, 2, 2) \times (4, 2, 2) = \vec{0}$

$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} =$

١٥

الحل

$(40 + 240) \times 40 = 40 \times 100$

$\therefore 40 \times 40 + 9600 = 40 \times 100$

$\therefore 40 = 160$ سم

١٦

الحل

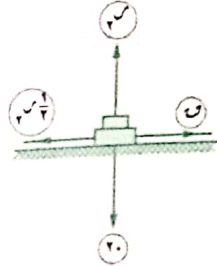
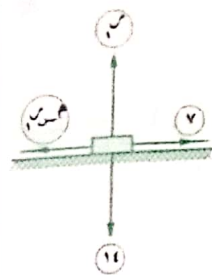
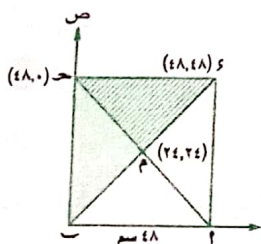
مساحة الجزء المقطوع

Δ ح م س :

مساحة المربع

$\epsilon : 1 = \epsilon$

مركز المثلث ح م س = $\left(\frac{48 + 48 + 24}{3}, \frac{0 + 48 + 24}{3} \right) = (40, 24)$



١١

الحل

الجسم على وشك الحركة.

$14 = 14, 7 = 14$

$7 = 14 \times \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = 14$

الجسم بعد وضع الصنج :

الجسم على وشك الحركة.

$14 = 14, 20 = 14$

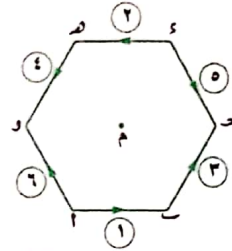
$20 = 14 \times \frac{1}{2}$

$20 = 14 \times \frac{1}{2}$

$\therefore 10 = 14$ ث.كجم = 98 نيوتن.

١٢

الحل



$\vec{M} = \vec{1} + \vec{2} + \vec{3} + \vec{4} + \vec{5} + \vec{6} = 2\sqrt{3}$ نيوتن. سم.

\therefore معيار العزم = $2\sqrt{3}$ نيوتن. سم.

١٣

الحل

الجسم على وشك الحركة

عندما يميل المستوى على الأفقى

بزاوية قياسها 30°

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$

الجسم على وشك الحركة لأعلى.

قوة الاحتكاك تعمل لأسفل

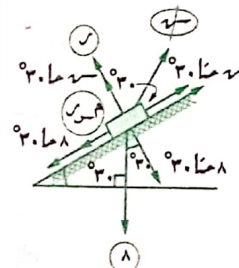
$30^\circ \text{ ح م س} = 30^\circ \text{ ح م س} + 8^\circ \text{ ح م س}$

$30^\circ \text{ ح م س} = 30^\circ \text{ ح م س} + 8^\circ \text{ ح م س}$

$30^\circ \text{ ح م س} - 30^\circ \text{ ح م س} = 8^\circ \text{ ح م س}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = 8^\circ$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} - \epsilon =$



(١)

(٢)

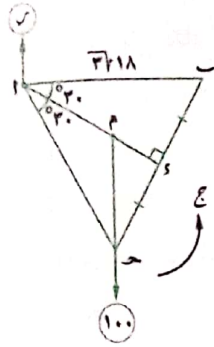
(٣)



٢٠ ①

الحل

من هندسة الشكل :



$$18 = 27 \times \frac{2}{3} \Rightarrow 27 = 27 \text{ سم}$$

$$18 = \frac{2}{3} \times 27 = 18 \text{ سم}$$

القوتان (١٠٠، ٢٧) تكونان ازدواجاً

قياسه الجبري ج

$$3\sqrt{2} \times 100 = 3\sqrt{2} \times 27$$

$$3\sqrt{2} \times 100 = 3\sqrt{2} \times 27$$

∴ الصفیحة متزنة تحت تأثير ازدواجین ج، ج

$$0 = ج + ج ∴ ج = 3\sqrt{2} \times 100 = 3\sqrt{2} \times 27$$

$$∴ معیار عزم الازدواج ج = 3\sqrt{2} \times 100 = 3\sqrt{2} \times 27$$

٢١ ②

٢٢ ③

الحل

$$2 = |ج - ج| ∴ ج > ج$$

$$2 \pm 0 = ج ∴ ج = 2$$

$$\{8, 2\} \ni ج ∴ ج = 8, 2$$

$$2 \pm 0 = ج ∴ ج = 2$$

$$8, 2 = ج ∴ ج = 8, 2$$

٢٣ ④

الحل

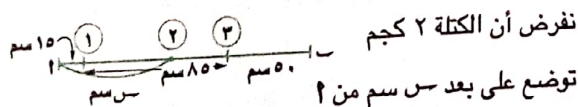
$$∴ المسافة العمودية بین القوتین = \frac{120}{3} = 40 \text{ سم}$$

مقدار كل قوة بعد الزيادة = 30 نيوتن.

$$∴ مقدار عزم الازدواج = 40 \times 30 = 1200 \text{ نيوتن.سم}$$

٢٤ ⑤

الحل



∴ مجموع عزوم القوى حول ٢ = عزم المحصلة حول ١

$$70 \times 6 = 100 \times 3 + 20 \times 2 + 10 \times 1$$

$$∴ س = 67,5 \text{ سم}$$

$$\left(\frac{48 + 24 + 0}{3}, \frac{0 + 24 + 0}{3} \right) = \text{مركز المثلث ح م ب} = (24, 8) =$$

ل	١	$\frac{1}{4} -$	$\frac{1}{4}$
س	٢٤	٢٤	٨
ص	٢٤	٤٠	٢٤

$$سم 20 = \frac{8 \times \frac{1}{4} + 24 \times \frac{1}{4} - 24 \times 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1}$$

$$سم 20 = \frac{24 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} - 24 \times 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1}$$

∴ مركز ثقل الصفیحة یبعد عن نقطة ب مسافة $\sqrt{20^2 + 24^2}$

$$= 32 \text{ سم}$$

٢٥ ⑥

الحل

$$سم 1 = \frac{0 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

$$ص 1 = \frac{1 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

∴ مركز الثقل هو $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

٢٦ ⑦

الحل

∴ مجموعة القوى متزنة

$$∴ ج = صفر ∴ ج \times 2 = ل \times 2$$

$$∴ ج = صفر ∴ ج \times 2 = ل \times 2$$

$$∴ ج = 2 \text{ داین} ∴ ج \times 2 = ل \times 2$$

$$∴ ج = 1 \text{ داین} ∴ ج \times 2 = ل \times 2$$

٢٧ ⑧

الحل

$$سم 8 = \frac{6 \times 2 + 12 \times 3 + 0 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

$$3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 6 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1}{2 + 2 + 1}$$

∴ مركز الثقل = $(3\sqrt{2}, 8)$

٢٨ ١

الحل

∴ $\vec{C} //$ المستقيم ل

$$\begin{aligned} \therefore E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 12 \text{ نيوتن سم.} \\ \therefore E_2 + E_3 = 20 \quad \therefore E_2 = 20 - E_3 \\ \therefore E_5 = 20 \quad \therefore E_6 = 20 \\ \therefore E_2 - E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = 12 \text{ نيوتن سم.} \end{aligned}$$

٢٨ ب

الحل

في Δ م أ ب :

$$\begin{aligned} \text{م أ} = 9 \text{ سم ، م ب} = 12 \text{ سم ، م ب} = 15 \text{ سم} \\ \text{طول العمود الساقط من م على أ ب} = \frac{12 \times 9}{15} = 7.2 \text{ سم} \\ \therefore \text{طول البعد العمودي بين القوتين} = 7.2 \times 2 = 14.4 \text{ سم} \\ \therefore \text{القياس الجبري لعزم الازدواج} = 14.4 \times 50 = 720 \text{ نيوتن سم.} \end{aligned}$$

٢٨ ك

الحل

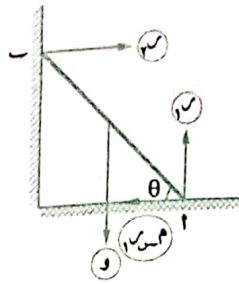
$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{3} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ح} \times \frac{1}{3}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب د} \times \frac{1}{3}} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ح}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب د}} \\ \therefore \text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ح} = 2 \text{ مساحة } \Delta \text{ أ ب د} \\ \therefore 2 = 2 \\ \therefore \text{مركز ثقل المجموعة تقسم م ب بنسبة ١ : ٢} \\ \therefore \text{م م} = 6 = 4 + 2 \text{ سم} \\ \therefore \text{مركز ثقل المجموعة أعلى أ ب بمسافة ٢ سم} \end{aligned}$$



٢٩ د

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{القضيب على وشك الانزلاق} \\ \therefore \mu_s = 1, \mu_k = 0.5, \mu_s = 1, \mu_k = 0.5 \\ \therefore \mu_s = 1, \mu_k = 0.5 \\ \therefore \mu_s = 1, \mu_k = 0.5 \\ \therefore \mu_s = 1, \mu_k = 0.5 \end{aligned}$$



٢٩ ح

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{D} \\ \therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{D} \\ \therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{D} \\ \therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{D} \end{aligned}$$

٢٩ د

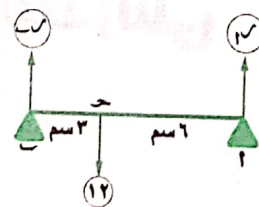
الحل

∴ القضيب يتزن أفقياً على وتد أفقى أُمس عند النقطة ح

∴ وزن القضيب يؤثر فى ح

وعند وضع القضيب على وتدين

عند أ ، ب



$$\begin{aligned} \therefore 3 \times \mu_s = 6 \times \mu_s \\ \therefore \mu_s = 2 \\ \therefore 12 = \mu_s + \mu_s \\ \therefore 12 = \mu_s + \mu_s \\ \therefore 12 = \mu_s + \mu_s \end{aligned}$$

الاختبار الأول

(ب) ٣

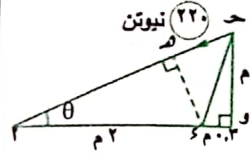
(ب) ٦

(ب) ٢

(ب) ٥

(د) ١

(ج) ٤



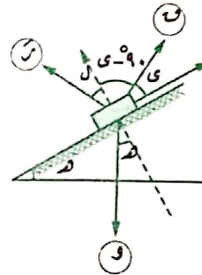
(1) $5 \times 22 = 110$

$\theta \times 22 = 110$

$\frac{629}{1} = \sqrt{(2,3)^2 + (1)^2} = 2,4$

$170,44 = \frac{1}{629} \times 2 \times 22 = 0,7$

∴ مقدار العزم = 170,44 نيوتن.متر



(ب) ∴ الجسم على

وشك الحركة

∴ الجسم متزن

ومن قاعدة لامي :

$\frac{W}{((J+H) - 90)} = \frac{W}{((J-Y) - 90)} = \frac{W}{((J+H) + 90)}$

$\frac{W}{(J+H)} = \frac{W}{(J-Y)} = \frac{W}{(J+H)}$

ويكون مقدار W أقل ما يمكن عندما (J-Y) أكبر ما يمكن

أي: $W = (J-Y) = 1$ ∴ $Y = J - 1$

∴ $Y = J$ ∴ مقدار أقل قوة = W و ما (J+H)

وتصنع مع المستوى لأعلى زاوية قياسها (J)

٢

(1) $20 = 10 + 10$

وفي نفس اتجاه القوتين

$10 = 10 + (70 - 10)$

$2 = 3 + (70 - 10)$

$220 = 5$ ∴ $5 = 40$ سم

أي: خط عمل المحصلة يبعد عن A مسافة 40 سم

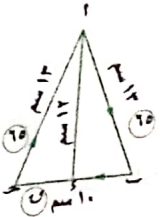
(ب) ∴ مجموعة القوى

تكافئ ازدواجاً

∴ القوى في اتجاه

دوري واحد فإن $\frac{70}{13} = \frac{1}{10}$

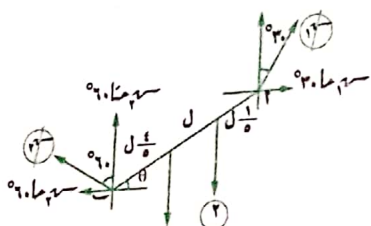
∴ $W = 50$ نيوتن



معيار عزم الازدواج = $2 \times (12 \times 10 \times \frac{1}{13}) \times 2 = 36,9$ نيوتن.سم

سم.م.ا

٥



معادلات الاتزان : $W = 20$ سم.م.ا = $W = 60$ سم.م.ا

(1) $\frac{W}{2} = \frac{1}{2} \times 20 = 10$

$10 = 60 + 20$ سم.م.ا

(2) $10 = \frac{1}{2} + \frac{W}{2}$

من (1)، (2) :

∴ $W = 30$ نيوتن ، $W = 5$ نيوتن

ج = صفر

$8 \times \frac{1}{2} \times 20 - 2 \times \frac{1}{2} \times 20 = 0$

$20 \times 30 + 20 \times 20 = 0$

$0 = 2 \times 20$

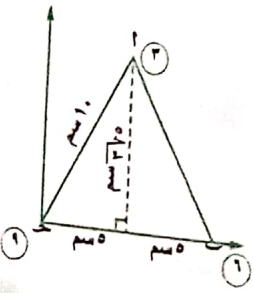
بالقسمة على L م.ا

$0 = 10 + 20 \times 30 - \frac{18}{5} - \frac{22}{5}$

$\frac{1}{30} = 0$ ∴ $0 = 20 \times 30$

$20 = 0$

أي: القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30°



ح	ب	أ	(ب)
٩	٦	٣	الكتلة
٠	١٠	٥	س
٠	٠	٣٢٥	ص

$$\frac{4.7}{72} = \frac{2.5 \times 7 + \frac{26}{3} \times 5}{12} = \text{سم} \therefore$$

∴ مركز الثقل يبعد عن حـ بمقدار $\frac{4.7}{72}$ سم

$$\frac{100}{72} = \frac{2.5 \times 7 + \frac{5}{3} \times 5}{12} = \text{ص} \therefore$$

∴ مركز الثقل يبعد عن حـ بمقدار $\frac{100}{72}$ سم

الاختبار الثاني

- ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (ب) ⑥ (ب)

$$(1) \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = (3, 1, -5) \times (1, 2, 1) =$$

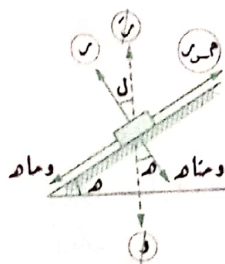
$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{e}_1(9 - 5) - \vec{e}_2(3 + 5) + \vec{e}_3(6 - 1) =$$

طول العمود المرسوم من و على خط عمل و

$$\frac{\|\vec{r} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{4^2 + 8^2 + 5^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{9.43}{7.07} = 1.33 \text{ وحدة طول.}$$



(ب) ∴ الجسم على وشك

الحركة لأسفل

$$\therefore r = 7 \text{ و } \theta = 30^\circ$$

$$r = 4 \text{ و } \theta = 60^\circ$$

بقسمة (٢) على (١) :

$$\therefore r = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$\therefore r = 1.75 \text{ طال حيث ل قياس زاوية الاحتكاك}$$

$$\therefore r = 1.75 \text{ طال}$$

∴ قياس زاوية الاحتكاك

= قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.



(1) نفرض أن نقطة

التعليق تبعد عن

أ مسافة س سم

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$\bar{x} = \frac{0 \times 9 + 10 \times 6 + 5 \times 2}{18} = \text{سم}$$

$$\bar{y} = \frac{0 \times 9 + 0 \times 6 + 3\sqrt{2} \times 2}{18} = \text{ص}$$

∴ مركز الثقل = $(\frac{1}{3}, \frac{3\sqrt{2}}{6})$ بالنسبة للنقطة «ح»

(1) من هندسة الشكل :

$$\vec{r} = (10, 0, 0) \text{ م} , \vec{v} = (0, 10, 0) \text{ م}$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = (0, 0, 100) \text{ م}^2/\text{ث}$$

$$\therefore \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{\|\vec{r} \times \vec{v}\|} = \frac{(0, 0, 100)}{100} =$$

$$\frac{(0, 0, 100)}{20 + 10 + 20} =$$

$$(20, 0, 20) = (0, 10, 0) \text{ م} =$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} =$$

$$(20, 0, 20) \times (10, 0, 0) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 20 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 200\vec{e}_1 - 200\vec{e}_3 =$$

∴ مركبة عزم القوة و بالنسبة لمحور س = 0

مركبة عزم القوة و بالنسبة لمحور ص = 200

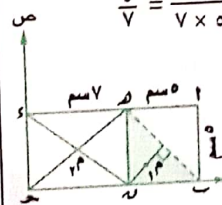
مركبة عزم القوة و بالنسبة لمحور ع = صفر

$$(ب) \therefore \frac{\text{مساحة المربع أ ب ح د}}{\text{مساحة المستطيل هـ ز ح د}} = \frac{5 \times 5}{7 \times 5} = \frac{5}{7}$$

∴ نفرض أن

كتلة المثلث ب هـ ز

$$= 5 \text{ كغ عند م}$$



كتلة المستطيل هـ ز ح د = 7 كغ عند م

$$(1, 1) = (0, 0, 0) + (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$(2, 0, 3, 0) = 2, 0$$

٢٢	١٢	
٧	٥	الكتلة
٣,٥	٢٦	س
٢,٥	٥	ص

$$r_2 \text{ مئ (ى - ه) } = \text{و}$$

$$r_2 = \frac{\text{و مئ}}{\text{مئ (ى - ه)}}$$

من (١) ، (٢) :

$$r_1 = \frac{\text{و مئ}}{\text{مئ (ى - ه)}} \times \frac{\text{مئ (ى - ه)}}{\text{مئ}}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

(٢) ج = صفر

$$\text{و} \times \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و} - \text{و} \times \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و} - \text{و} = \text{صفر}$$

$$r_1 = \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و}$$

$$\text{ومن (٢) : } r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

حل آخر :

نفرض أن رد الفعل

المحصل عند ب هو (م_٢)

والوزن ورد فعل الحائط

يتقاطعان فى نقطة و

من هندسة الشكل :

$$r_1 = \text{و} ، r_2 = \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$\text{و} = (\text{د ح ب}) = \text{ى - ه}$$

(لأن ى زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين رد

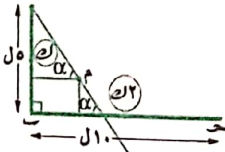
الفعل العمودى والمحصل)

$$(١) r_2 = \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و}$$

$$(٢) \text{ فى } \Delta \text{ و س : } r_1 = \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و}$$

$$\text{من (١) ، (٢) : } r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

(ب) نفرض أن α زاوية ميل س ح على الرأسى



الكتلة	ل ٢	ل
س	٠	ل
ص	ل ٢,٥	٠

$$r_1 = \frac{\text{و} \times \text{ل ٢}}{\text{ل ٣}} = \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$r_2 = \frac{\text{و} \times \text{ل ٢,٥}}{\text{ل ٣}} = \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$\text{مركز الثقل} = \left(\frac{\text{و}}{\text{و}} , \frac{\text{و}}{\text{و}} \right)$$

$$r_1 = \frac{\text{و} - \frac{\text{و}}{\text{و}}}{\frac{\text{و}}{\text{و}}} = \alpha$$

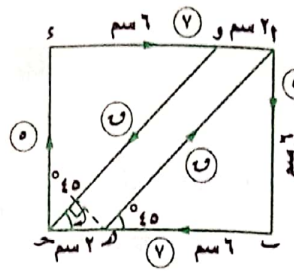
$$\text{س ح يميل على الأفقى بزاوية } \theta \text{ حيث } \theta = \frac{\alpha}{\text{و}}$$

$$\text{مجموع عزوم القوى حول أ} = \text{عزم المحصلة حول أ}$$

$$10 \times 11 + 6 \times 7 = 11 \times 5 + 7 \times 5$$

$$r_1 = 9 \text{ سم}$$

أى أ : نقطة التعليق تبعد ٩ سم عن أ



(ب) القوتان (٥ ، ٥)
تكونان ازدواجاً

قياسه الجبرى

(ج) حيث

$$8 \times 5 = 40$$

$$40 = 40 \text{ كجم.سم}$$

القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج ٢)

$$\text{حيث ج} = 7 \times 7 = 49 = 49 \text{ كجم.سم}$$

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$\text{حيث ج} = 5 \times 5 = 25 = 25 \text{ كجم.سم}$$

$$40 + 49 + 25 = 114$$

$$114 = 40 + 49 + 25 = 114$$

$$r_1 = \frac{114}{27} = 4.22 \text{ كجم}$$

٤

(١) نفرض أن السلم يصنع

زاوية قياسها θ مع الرأسى

معادلات الاتزان :

$$r_1 + r_2 \text{ مئ (ى - ه) } = \text{و}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

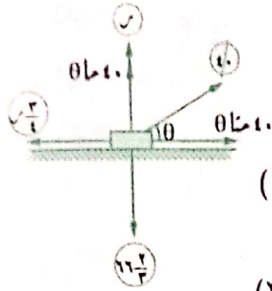
$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_2 = \text{و ط (ى - ه)}$$

$$r_1 = \text{و ط (ى - ه)}$$

الاختبار الثالث

- ١ ٧٥ (٢) ٢٥٠ نيوتن. سم
 (٣) $4 \pm (س - ٢ ص)$ (٤) ٢٠٠٠ نيوتن. سم
 (٥) بمركز الكرة (٦) نقطة تقاطع المتوسطات.



١ معادلتا الاتزان هما :

$$(١) 40 \times 5 = 20 \times 5$$

$$200 = 100$$

$$(٢) 40 \times 5 = 20 \times 5$$

بترتيب (١) ، (٢) وجمعهما :

$$40 \times 5 + 20 \times 5 = 20 \times 5 + 40 \times 5$$

$$200 + 100 = 100 + 200$$

$$300 = 300$$

$$200 + 100 = 300$$

$$300 = 300$$

$$300 = 300$$

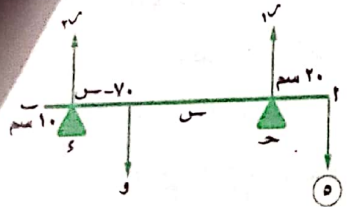
$$300 = 300$$

وبالتعويض في (١) :

$$40 \times 5 = 20 \times 5$$

$$(ب) 60 \times 20 = 40 \times 20$$

$$1200 = 800$$



(١) • عند تعليق ثقل

٥ ث. كجم من

أ فإن القضيبي

يصبح على وشك الدوران حول ح

$$س = ٠ \text{ صفر} ، ح = ٠ \text{ صفر}$$

$$٢٠ \times ٥ = ٠$$

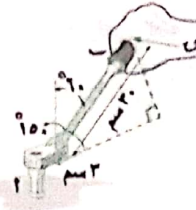
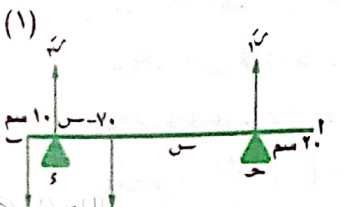
$$١٠٠ = ٠$$

• عند تعليق ثقل

٤ ث. كجم من

ب يصبح القضيبي

على وشك الدوران حول د



$$\frac{\| \vec{G} \|}{\| \vec{U} \|} = \text{طول العمود} \quad (١)$$

• طول العمود

$$\sqrt{(٦٠ \times ٢٠)^2 + (٦٠ \times ٢٠ + ٢)^2} =$$

$$٣٢, ٦٣ \approx$$

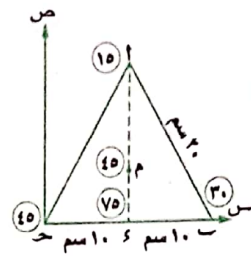
$$\therefore \| \vec{U} \| = \frac{٦٢٠}{٣٢, ٦٣} \approx ١٩ \text{ نيوتن}$$

حل آخر :

إيجاد طول العمود :

$$\sqrt{١٥٠(٣) - (٣)^2 + (٣٠)^2} = ١$$

$$٣٢, ٦٣ \approx$$



أولاً : مركز ثقل المجموعة :

نختار الاتجاهين

المتعامدين حـ

حـ ،

الكتلة	٤٥	٧٥	٢٠	١٥	٤٥
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	٣٢١٠	٣٢١٠

$$\therefore س = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ٢٠ \times ٢٠ + ١٠ \times ٧٥}{٤٥ + ١٥ + ٢٠ + ٧٥ + ٤٥}$$

$$\frac{٦٥}{٧} =$$

$$ص = \frac{\frac{٣٢١٠}{٣} \times ٤٥ + \frac{٣٢١٠}{٣} \times ١٥}{٤٥ + ١٥ + ٢٠ + ٧٥ + ٤٥}$$

$$\frac{٣٢١٠}{٧} =$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = \left(\frac{٣٢١٠}{٧} , \frac{٦٥}{٧} \right) \text{ من نقطة «ح»}$$

ثانياً : بعد رفع الكتلة عند ب :

الكتلة	٢١٠	٢٠
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{٣٢١٠}{٧}$	٠

$$\therefore س = \frac{٢٠ \times ٢٠ - \frac{٦٥}{٧} \times ٢١٠}{٢٠ - ٢١٠} = \frac{١٥}{٢}$$

$$ص = \frac{\frac{٣٢١٠}{٧} \times ٢١٠}{٢٠ - ٢١٠} = \frac{٣٢١٠}{٢}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل الجديد} = \left(\frac{٣٢١٠}{٢} , \frac{١٥}{٢} \right)$$

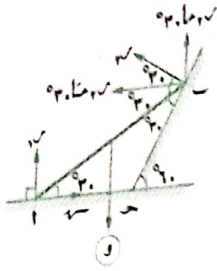
من نقطة «ح»

أى القوة فى اتجاه حـ

$$F_{\text{حـ}} = (2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12) \times 5 = 20 \text{ نيوتن}$$

٤

(١)



معادلات الاتزان :

$$\sum F_x = 0$$

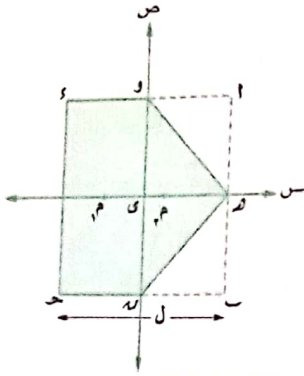
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow 20 - 20 = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow 20 - 20 = 0 \\ \sum F_z &= 0 \Rightarrow 20 - 20 = 0 \end{aligned}$$

(ب)



باختيار اتجاهين متعامدين

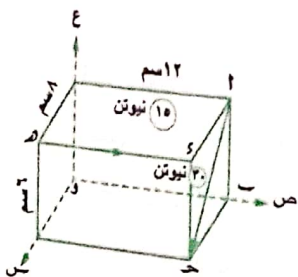
ي و

٢٠	٢٠	الكتلة
٢٠	٢٠	س
٢٠	٢٠	ص

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 20 - 20 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 - 20 = 0$$

∴ مركز الثقل = (٠، ١، ١) بالنسبة لمركز المربع «ي»



من هندسة الشكل :

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$$

$$(6, 12, 8) =$$

$$(6, 0, 8) =$$

$$(0, 12, 0) =$$

(١)

$$\vec{r}_1 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_2 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_3 = 10 \times 4 = 40$$

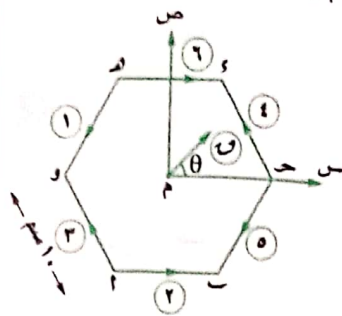
$$\vec{r}_4 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_5 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_6 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_7 = 10 \times 4 = 40$$

$$\vec{r}_8 = 10 \times 4 = 40$$



نفرض $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6, \vec{r}_7, \vec{r}_8$ متجه وحدة فى اتجاه حـ العمودى عليه

وأن القوى ٢، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ نيوتن هى :

$$\vec{F}_1 = 2\vec{r}_1, \vec{F}_2 = 4\vec{r}_2, \vec{F}_3 = 5\vec{r}_3, \vec{F}_4 = 6\vec{r}_4, \vec{F}_5 = 7\vec{r}_5, \vec{F}_6 = 8\vec{r}_6$$

$$\vec{F}_1 = 2\vec{r}_1, \vec{F}_2 = 4\vec{r}_2, \vec{F}_3 = 5\vec{r}_3, \vec{F}_4 = 6\vec{r}_4, \vec{F}_5 = 7\vec{r}_5, \vec{F}_6 = 8\vec{r}_6$$

$$\vec{F}_7 = 7\vec{r}_7, \vec{F}_8 = 8\vec{r}_8$$

$$\vec{F}_9 = 9\vec{r}_9, \vec{F}_{10} = 10\vec{r}_{10}$$

$$\vec{F}_{11} = 11\vec{r}_{11}, \vec{F}_{12} = 12\vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{13} = 13\vec{r}_{13}, \vec{F}_{14} = 14\vec{r}_{14}$$

$$\vec{F}_{15} = 15\vec{r}_{15}, \vec{F}_{16} = 16\vec{r}_{16}$$

$$\vec{F}_{17} = 17\vec{r}_{17}, \vec{F}_{18} = 18\vec{r}_{18}$$

$$\vec{F}_{19} = 19\vec{r}_{19}, \vec{F}_{20} = 20\vec{r}_{20}$$

$$\vec{F}_{21} = 21\vec{r}_{21}, \vec{F}_{22} = 22\vec{r}_{22}$$

$$\vec{F}_{23} = 23\vec{r}_{23}, \vec{F}_{24} = 24\vec{r}_{24}$$

$$\therefore \text{ح } \frac{1}{3} = 16 \times \frac{1}{3} = 5.33 \text{ ث. كجم}$$

$$\therefore \text{ح} > \text{س}$$

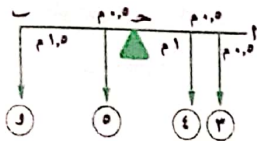
∴ الجسم متزن وليس على وشك الحركة.

$$(ب) \text{ ح} = 110 \times \frac{4}{5} \times 250 - 60 \times 150 = 2000$$

$$2 \times 2000 = 4000 \text{ ث. كجم. سم}$$

$$= 150 + 40 \times \frac{4}{5} \times 250 + 2 \times 2000 = 21700 \text{ ث. كجم. سم}$$

$$= 90 \times 21700 = 1953000 \text{ ث. كجم. سم}$$

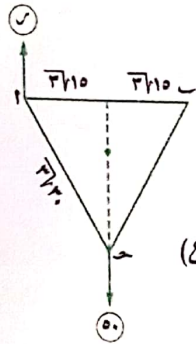


(1)

$$\therefore \text{ح} = \text{س} = \text{صفر}$$

$$2 \times 9 + \frac{1}{3} \times 5 = 1 \times 4 + 1.5 \times 2$$

$$\therefore \text{و} = 2 \text{ ث. كجم}$$



(ب)

∴ الازدواج لا يتزن

إلا مع ازدواج

∴ القوتان (س، و)

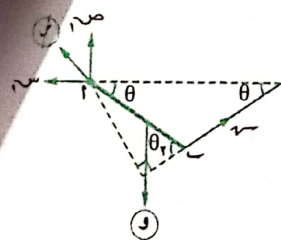
تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ح)

$$\therefore \text{س} = 50 \text{ ث. كجم}$$

$$\text{ح} = 3 \times 750 = 2250 \text{ ث. كجم. سم}$$

∴ عزم الازدواج المؤثر قياسه الجبرى

$$= 2250 \text{ ث. كجم. سم}$$



(2)

بفرض أن مقدار مركبتى

رد فعل المفصل عند

هما س، و

$$(1) \therefore \text{معادلات الاتزان: س} = \text{و} \times \frac{1}{2} \times \theta$$

$$(2) \text{ و} = \text{و} \times \frac{1}{2} \times \theta$$

$$\text{ح} = 0 \therefore \text{و} = \frac{1}{2} \times \theta \times 200$$

$$\therefore \text{و} \times 2 \times 200 \times \frac{1}{2} = \theta \times 200 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{أى: و} = \frac{1}{2} \times \theta$$

وبالتعويض فى (1) ∴ س = و = 100

$$\frac{(0, 12, 0)}{\sqrt{0^2 + 12^2 + 0^2}} \times 10 = \frac{(0, 10, 0)}{\sqrt{0^2 + 10^2 + 0^2}} \times 10 = 10$$

$$(0, 10, 0) =$$

$$(6, 12, 0) - (0, 12, 8) = \vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$$

$$(6, 0, 8) =$$

$$\frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \times 20 = \vec{C}$$

$$\frac{(6, 0, 8)}{\sqrt{6^2 + 0^2 + 8^2}} \times 20 =$$

$$(18, 0, 24) =$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{C} \\ 6 & 12 & 0 \\ 18 & 0 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{C} \\ 6 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$= 228\vec{A} - 144\vec{B} + 216\vec{C}$$

$$= 120\vec{A} + 90\vec{B} =$$

$$= 168\vec{A} - 144\vec{B} + 206\vec{C} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 20 + 2 \times 10 + 2 \times 20}{20 + 10 + 20} = \text{س (ب)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 20 + 1 \times 10 + 1 \times 20}{20 + 10 + 20} = \text{ص م}$$

∴ مركز الثقل هو $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

الاختبار الرابع

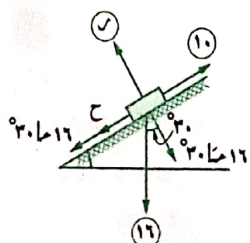
(1)

$$(ج) ① (ب) ② (ب) ③$$

$$(ج) ④ (ب) ⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦$$

(2)

(1)



$$\therefore 100 < 16 \times 20$$

∴ قوة الاحتكاك (ح)

تعمل لأسفل

∴ الجسم متزن

$$\therefore 100 = 16 \times 20 + \text{ح}$$

$$\therefore \text{ح} = 2 \text{ ث. كجم}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{J \frac{1}{3} \times 12 + J \times 2}{12 + 2 + 2} = J \frac{1}{3}$$

$$\text{ص} = \frac{J \frac{2}{3} \times 12}{12 + 2 + 2} = J \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{مركز ثقل المجموعة} = (J \frac{1}{3}, J \frac{2}{3})$$

بالنسبة للنقطة «أ» وهو نفس إحداثيات النقطة هـ

(منتصف م ح)

(ب) من هندسة الشكل :

$$\vec{A} = (10, 0, 0), \vec{B} = (0, 8, 6)$$

$$\therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{BA} = (10, -8, -6)$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|} \times 50 =$$

$$\frac{(10, -8, -6)}{\sqrt{(10)^2 + (-8)^2 + (-6)^2}} \times 50 =$$

$$= (25.2, -20, -15)$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{u} \times \vec{u} =$$

$$= (25.2, -20, -15) \times (10, 0, 0) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 25.2 & -20 & -15 \\ 10 & 0 & 0 \\ 25.2 & -20 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= -25.2 \times 20 + 25.2 \times 150 =$$

الاختبار الخامس

① مقدار قوة الاحتكاك السكوني النهائي ورد الفعل العمودي.

$$\textcircled{2} \quad 11 - \text{س} - 17 - \text{ص} + \text{ع} =$$

$$\textcircled{3} \quad 10 \frac{1}{3} \quad \textcircled{4} \quad 2$$

⑤ • انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاهين

متعامدين.

• انعدام مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة

لنقطة واحدة في مستوياتها.

⑥ نقطة التعليق.

وبالتعويض في (2) : $\therefore \text{ص} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{4}$

$\therefore \text{س} = \frac{1}{4}$ (رد فعل المفصل)

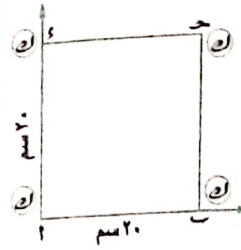
$$= \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



(ب) ① \therefore الكتل الأربع

متساوية في

المقدار

\therefore مركز الثقل يؤثر في المركز الهندسي للمربع

$$(10, 10)$$

② عند رفع أحد الكتل وليكن الكتلة عند حـ

\therefore مركز الثقل يقع عند المركز الهندسي للمثلث

$$\text{أ} \text{ و } \text{ب} \text{ أي نقطة تقاطع متوسطاته} \left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$$

5

(1) بتوزيع الكتلة 2 كجم على

الرؤوس أ، ب، حـ

لتصبح كتلة عند أ = 2 كجم

، عند ب = 2 كجم

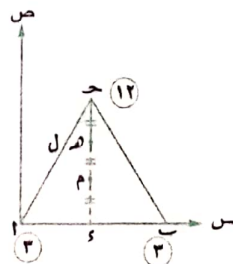
، عند حـ = 12 كجم

، باختيار اتجاهين متعامدين أ س، أ ص

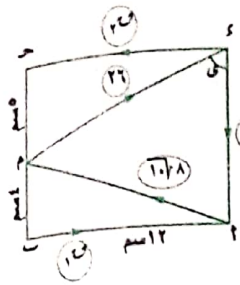
، بفرض أن طول ضلع المثلث «ل»

$$\therefore \text{حـ} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ و } \frac{1}{3} = \text{م} \therefore \left(J \frac{2\sqrt{2}}{3}, J \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \text{هـ} = \left(J \frac{2\sqrt{2}}{3}, J \frac{1}{3}\right)$$



حـ	ب	أ	
12	2	2	هـ
$J \frac{1}{3}$	J	0	س
$J \frac{2\sqrt{2}}{3}$	0	0	ص



$$(ب) \therefore 20 + 144 = 64$$

$$12 \text{ سم}$$

$$16 + 144 = 160$$

$$160 = 16 \times 10$$

القوى في \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} في اتجاه دورى واحد

$$2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\therefore \text{مساحة } \Delta = 64 = 9 \times 12 \times \frac{1}{2} = 54 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{ج} = 2 - 2 \times 54 = 216 \text{ نيوتن. سم}$$

\therefore الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

\therefore (د، هـ) تعيينان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$216 = \text{نيوتن. سم}$$

$$\therefore 216 = 9 \times 24 \therefore 24 = 24$$

$$24 = 24$$

$$\therefore 24 = 24 \text{ نيوتن} \quad \therefore 24 = 24 \text{ نيوتن}$$



(أ) نفرض أن السلم متزن

$$1 \text{ م}$$

$$20 = 1 \text{ م}$$

$$\text{ج} = \text{صفر}$$

$$20 = 1 \text{ م} - 1.5 \times 20 = 4 \times 1 \text{ م}$$

$$20 = 1 \text{ م} \therefore \frac{1}{4} = 1 \text{ م}$$

$$\therefore \text{مقدار ح عند ب} = 1 \text{ م} = 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

\therefore السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة

لأن $ح < ح$

بعد وضع الجسم الذى وزنه (و)

• بالنسبة للجسم :

$$\therefore \text{ض} = \frac{1}{10} \text{ م} \quad \therefore \text{و} = 1 \text{ م} \quad \therefore \text{ض} = \frac{1}{10} \text{ م}$$

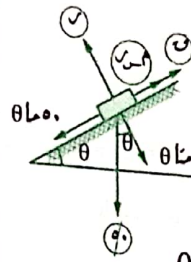
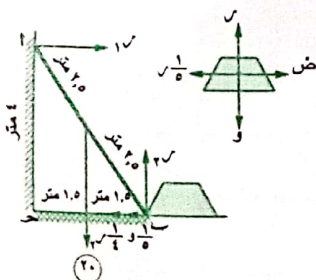
• بالنسبة للسلم :

$$1 \text{ م} = \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{1}{10}$$

$$20 = 1 \text{ م}$$

$$\text{ج} = \text{صفر}$$



(1) • عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأسفل

(أقل قوة) :

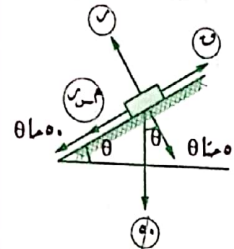
$$\therefore 10 + 10 = 10 \text{ م}$$

$$10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

$$10 \text{ م} = 10 \text{ م} + 10 \text{ م}$$

$$\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

(1)



• عندما يكون الجسم على

وشك الحركة لأعلى (أكبر

قوة) :

$$\therefore 10 + 10 = 10 \text{ م}$$

$$10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

$$\therefore 10 \text{ م} + 10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

$$\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

(2)

من (1)، ينتج أن :

$$\frac{10 \text{ م} - 10 \text{ م}}{10 \text{ م}} = \frac{10 \text{ م} - 10 \text{ م}}{10 \text{ م}}$$

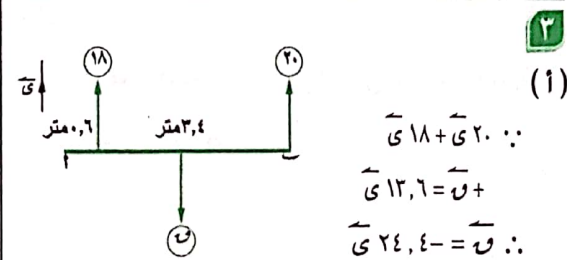
$$\frac{1}{4} = 10 \text{ م} \therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م}$$

$$(ب) \therefore \text{ج} = 200 = 200 \text{ نيوتن. سم}$$

$$200 = 5 \times 20 \text{ م} - 10 \times 20 \text{ م}$$

$$200 = (20 \text{ م} + 20 \text{ م})$$

$$\therefore 200 = 20 \text{ م}$$



(2)

(1)

$$\therefore 18 + 20 = 18 + 20$$

$$13.6 = 13.6$$

$$\therefore 24.4 = 24.4$$

$\therefore 24.4$ ث. كجم وتؤثر رأسياً لأسفل

ونفرض أن نقطة تأثيرها تبعد مسافة س عن ؟

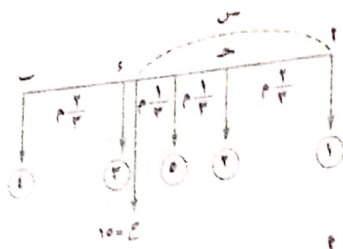
\therefore مجموع عزوم القوى حول ؟ = عزم المحصلة حول ؟

$$\therefore 20 \times 3.4 + 18 \times 0.6 - 24.4 \times س = 0$$

$$3 \times 13.6 =$$

$$\therefore س = 2.05 \text{ متر}$$

(١)



نفرض أن
مركز ثقل
المجموعة بعيد

مسافة من متر عن ١

$$\text{عزم القوى حول ١} = \text{عزم المحصلة حول ١}$$

$$\therefore 1 \times 10 = 2 \times 4 + \frac{4}{3} \times 2 + 1 \times 6 + \frac{2}{3} \times 8$$

$$\therefore \text{س} = \frac{11}{3} \text{ متر}$$

\therefore مركز الثقل يبعد مسافة $\frac{11}{3}$ متر عن ١

$$(ب) \therefore \overrightarrow{P_1} = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} = (1, 2) - (1, 2) = \overrightarrow{P_3}$$

$\therefore \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}$ يكونان ازدواجًا

قياسه الجبري (ج)

\therefore عزم الازدواج ثابت لا يعتمد على النقطة

التي نأخذ العزوم عندها

\therefore عزم الازدواج = عزم القوة $\overrightarrow{P_1}$

حول النقطة $\overrightarrow{P_2} \times \overrightarrow{P_3}$

$$(1, 2) \times (5, 1) =$$

$$-11 =$$

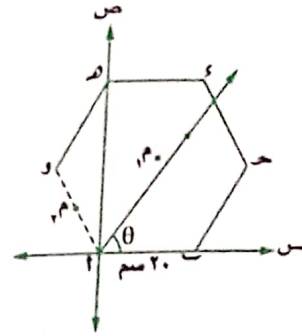
$$\therefore 1.5 \times 20 - 4 \times 15 = \text{صفر}$$

$$\therefore 15 \times 4 = 30$$

$$\therefore 7 \frac{1}{3} = 15 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore 12 \frac{1}{3} \text{ ث. كجم}$$

(ب)



طول كل ضلع من الشكل = $\frac{10}{5} = 20$ سم

وبفرض أن كتلة كل ضلع = ٤

\therefore كتلة الشكل السداسي = ٦ ٤

وتؤثر في م = $(10, 10)$

، كتلة الضلع ١ أو ٤

وتؤثر في م = $(-5, 35)$

٢٤	١٤	
٤ -	٦ ٤	الكتلة
٥ -	١٠	س
٣٢٥	٣٢١٠	ص

$$\text{س} = \frac{5 \times 4 - 10 \times 6}{5} = 13$$

$$\text{ص} = \frac{325 \times 4 - 3210 \times 6}{5} = 3211$$

\therefore مركز ثقل السلك = $(13, 3211)$

، مركز المسدس = $(10, 3210)$

\therefore بُعد مركز ثقل السلك عن مركز المسدس

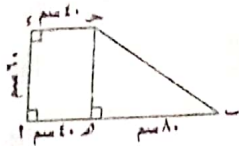
$$= \sqrt{(3210 - 3211)^2 + (10 - 13)^2} = 322 \text{ سم}$$

عند التعليق من ١

$$\therefore \theta \approx 2^\circ 50'$$

$$\therefore \theta = \frac{3211}{13}$$

مساحة المستطيل أ ه ح د : مساحة المثلث ه ب ح
 $60 \times 80 \times \frac{1}{2} = 60 \times 40 =$
 $1 : 1 =$
 ∴ نفرض أن كتلة المستطيل



ك وتؤثر عند النقطة (٢٠ ، ٢٠) =
 ∴ كتلة المثلث = ك وتؤثر عند النقطة

$$(20, \frac{200}{3}) = (\frac{0+60+0}{3}, \frac{120+40+40}{3})$$

ك	ك	الكتلة
$\frac{200}{3}$	٢٠	س
٢٠	٢٠	ص

$$\frac{120}{3} = \frac{ك \frac{200}{3} + ك ٢٠}{ك ٢} = س ∴$$

$$٢٥ = \frac{ك ٢٠ + ك ٢٠}{ك ٢} = ص ∴$$

∴ بُعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من :

$$س أ ، س ب هما \frac{120}{3} سم ، ٢٥ سم$$

٨

٧

٩

$$\vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \times \vec{B} = \vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A})$$

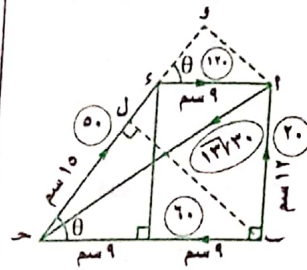
$$(1, -2, 3) \times (2, 2, 1) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{e}_1 11 - \vec{e}_2 7 + \vec{e}_3 10 =$$

$$\frac{\sqrt{11^2 + 7^2 + 10^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\|\vec{C}\|}{\|\vec{A}\|} = \text{طول العمود}$$

$$\approx ٧,٧٣ \text{ وحدة طول}$$



من هندسة الشكل :

$$ب ل = ١٨ م$$

$$\frac{12}{10} \times ١٨ =$$

$$= ١٤,٤ سم$$

$$١,٩ م = ١٨ م \times \frac{12}{10} = ٢١,٦ سم$$

$$١,٢ م = ١٨ م \times \frac{12}{10} = ٢١,٦ سم$$

$$(١) ع = ١٨ م \times ١٢ - ١٢ \times ٦ = ١٠٨٠ - ٧٢٠ = ٣٦٠ سم$$

$$ع = ١٢ \times ١٢ - \frac{١٨ \times ١٢}{12} \times ١٢ = ١٤٤ - ٢١٦ = -٧٢ سم$$

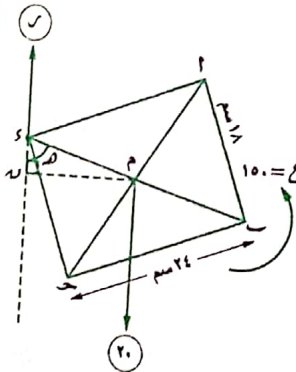
$$(٢) ع = ١٨ م \times ١٢ - ١٤,٤ \times ٥٠ = ٢١٦ - ٧٢٠ = -٥٠٤ سم$$

$$(٣) ع = ١٨ م \times ١٢ - ١٨ \times ٢٠ = ٢١٦ - ٣٦٠ = -١٤٤ سم$$

من (١) ، (٢) ، (٣) :

$$ع = ع = ع = ١٠٨٠ - ٣٦٠ = ٧٢٠ سم$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه = ١٠٨٠ - ٣٦٠ سم



$$س = \sqrt{11^2 + 7^2 + 10^2} =$$

$$= ٢٠ سم$$

$$س م = ١٥ سم$$

$$س م = ١٥ م$$

∴ الصفيحة متزنة تحت

تأثير ازدواجين

∴ القوتان (س ، ٢٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$= ١٥٠ نيوتن.سم$$

$$١٥٠ - ٢٠ \times ١٥ = ١٥٠ - ٣٠٠ = -١٥٠ سم$$

$$١٥٠ - ٢٠ \times ١٥ = ١٥٠ - ٣٠٠ = -١٥٠ سم$$

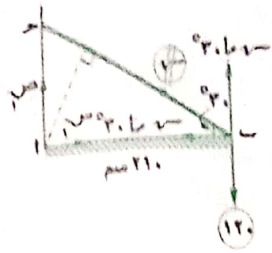
$$\frac{1}{2} = م$$

$$١٥٠ ، ٣٠ = م (د ه)$$

∴ قياس زاوية ميل س على الرأسى لأسفل تساوى ٣٠ ، ١٥٠

٥

٤



(١) من هندسة الشكل :

$$٢٠ = ٢١ \times \frac{١٢}{٢٩}$$

$$١٢٠ = ٢٧ \times \frac{٢٠}{٢٩}$$

∴ القضيبة متزن

$$٢٠ \text{ سم} = ٢٧ \text{ سم}$$

$$٢٧ \times \frac{٢٠}{٢٩} = ٢٠ \text{ سم}$$

(١)

$$١٢٠ = ٢٠ \text{ سم} + ١٢٠$$

(٢)

$$١٢٠ = ٢٠ \text{ سم} + ١٢٠$$

$$٢٠ \text{ سم} = ٢٠ \text{ سم}$$

$$٢١ \times ١٢٠ = ٢٠ \times ٢٧$$

$$٢٤٠ = ٢٧ \text{ نيوتن}$$

ومن (١) :

$$٢٧ \times ١٢٠ = ٢٤٠ \times \frac{٢٧}{٢٩}$$

$$\text{ومن (٢) : } ٢٤٠ \times \frac{١}{٢٩} - ١٢٠ = ٢٤٠$$

$$٢٧ \times ١٢٠ = ٢٤٠ \text{ نيوتن في اتجاه اليمين}$$

(ب) بفرض أن الفتاة تصعد مسافة ٢٠

يكون عندها السلم على وشك الانزلاق

معادلات الاتزان :

$$٢٧ \times \frac{١}{٢٩} = ١٧$$

$$٨٠ = ٢٧$$

$$٨٠ \times \frac{١}{٢٩} = ١٧$$

$$\frac{٢٧ \times ٤٠}{٢} =$$

$$٢٧ = ٢٧$$

$$٢٠ \times \frac{١}{٢٩} \times ٢٠ + ٦٠ \times ٢٠ = ٦٠ \times ٢٠$$

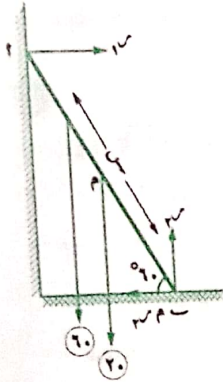
$$٢٠ \times ٢٠ = ٦٠ \times ٢٠$$

$$\frac{٢٧}{٢} \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٠$$

$$٢٠ = ٢٠$$

$$٢٠ = ٢٠$$

أي أنه : أقصى مسافة تصعد الفتاة تساوي ١/٢ طول السلم.



$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \frac{20}{9+16} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

(١)

(٢)

(٣)

$$٥٠ < ٢٠ \text{ سم}$$

∴ تعمل في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى

∴ الجسم متزن

$$٢٠ \text{ سم} = ٥٠ + ٢٠$$

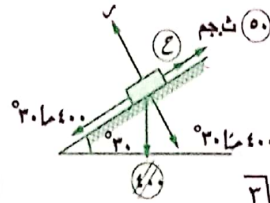
$$١٥٠ = ٢٠$$

$$٢٧ \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٧$$

$$٢٧ \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٧$$

$$٢٧ = ٢٧$$

∴ الجسم يكون على وشك الحركة.



(١)

(٢)

(٣)

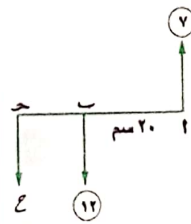
$$٥ = ٧ - ١٢ = ٥ \text{ نيوتن}$$

$$١٢ \times ٧ = ١٢ \times ٧$$

$$١٢ \times ٧ = ١٢ \times ٧$$

$$٢٤٠ = ٢٤٠$$

∴ ٥ نيوتن وتعمل في اتجاه القوة ١٢ نيوتن وتبعد نقطة تأثيرها ٤٨ سم عن ٢



(١)

(٢)

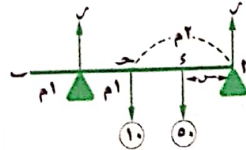
من الاتزان نجد أن :

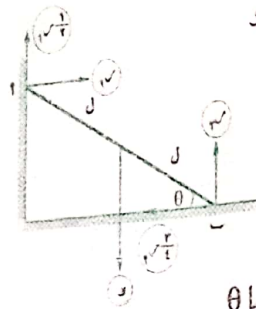
$$٢٠ = ٢٠$$

$$٢٠ = ٢٠$$

$$٢ \times ٢٠ = ٢ \times ٢٠$$

$$١.٤ = ١.٤$$





$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

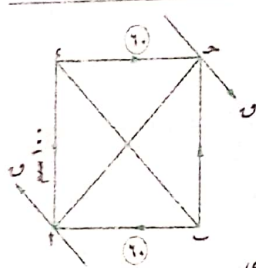
$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$



القوتان 60 ، 60 نيوتن

متوازيتان ومتساويتان

ومتضادتان فى الاتجاه

∴ يكونان ازدواج قياسه الجبرى

$$100 \times 60 = 60 \times 100$$

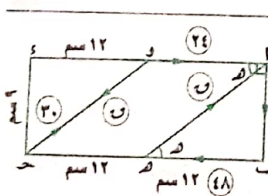
∴ القوتين 60 ، 60 تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$100 \times 60 = 60 \times 100$$

$$100 \times 60 = 60 \times 100$$

$$100 \times 60 = 60 \times 100$$

$$100 \times 60 = 60 \times 100$$



∴ القوى الأربعة تؤثر فى

أضلاع الشكل الرباعى فى ح و فى اتجاه دورى واحد

$$120 \times 12 = 12 \times 120$$

∴ القوى تكافئ ازدواجاً معيار عزمه

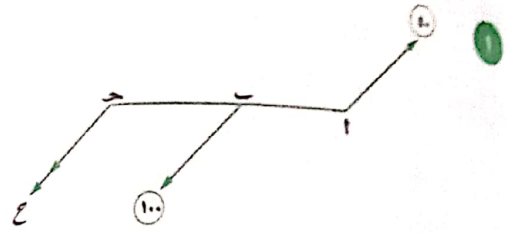
$$120 \times 12 = 12 \times 120$$

$$120 \times 12 = 12 \times 120$$

$$120 \times 12 = 12 \times 120$$

$$120 \times 12 = 12 \times 120$$

$$120 \times 12 = 12 \times 120$$



$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 = 100$$

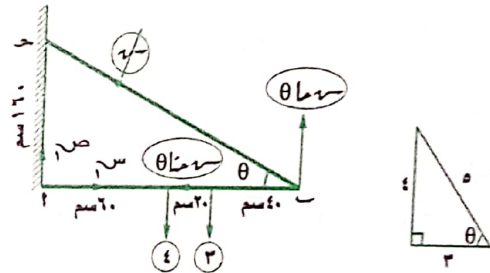
$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

$$100 = 100$$

نقطة تأثير المحصلة تبعد 40 سم عن النقطة 1

وتبعد 160 سم عن النقطة 2



$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

معادلات الاتزان :

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$100 \times 1 = 20 \times 5$$

$$(1, -2, 2) - (2, 1, -3) = \vec{c} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{a} = \vec{r}(1)$$

$$(3, 1, -5) =$$

$$(3, 1, -2) \times (3, 1, -5) = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{r}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{a} & \vec{r} \\ 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{صفر}) \vec{c} + 21 \vec{a} + 7 \vec{r} =$$

$$21 \vec{a} + 7 \vec{r} =$$

$$\frac{\sqrt{7^2 + 21^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{c}\|} = \text{طول العمود}$$

$$\sqrt{25} = \text{وحدة طول.}$$

$$(ب) \vec{r} = 9 \vec{c}$$

$$\vec{r} = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c}$$

$$(3, 1, -2) \times (4, 0, 1) + (3, 1, -2) \times (2, 1, 1)$$

$$\vec{r} = (1, 2, -) \times (4, 2, 1) +$$

$$\vec{r} = \vec{c} (8 + 2) + \vec{c} (4 - 0) + \vec{c} (2 - 1)$$

$$(1) \quad 15 = 2 - 1$$

$$\vec{r} = 4 \vec{c}$$

$$\vec{r} = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c}$$

$$(3, 1, -2) \times (1, 2, 1) + (3, 1, -2) \times (1, -3, 2)$$

$$\vec{r} = (1, 2, -) \times (1, 4, 1) +$$

$$\vec{r} = \vec{c} (2 + 4) + \vec{c} (1 - 6) + \vec{c} (2 + 1)$$

$$(2) \quad 3 = 2 + 1$$

$$3 = 2 + 1 \quad \therefore \text{من (2) ينتج أن: } 3 = 2 + 1$$

$$(17)$$

$$(16)$$

$$(15)$$

$$(18)$$

من الاتزان:

$$150 + 60 = 2 \times 70$$

$$\therefore 2 \times 70 = 210 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore 70 = 70 \text{ نيوتن}$$

$$0 = 70$$

$$\therefore 90 \times 70 - 40 \times 60 + 150 \times 10 = 0$$

$$\therefore 24 = 24$$

يجب تعليق الثقل على بُعد 24 من الطرف 1

OPPO A1k

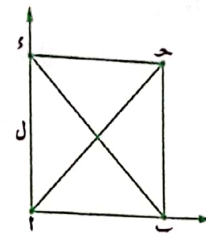
$$(7)$$

$$(6)$$

$$(8)$$

بفرض أن طول ضلع المربع ل سم

عند 1	عند 2	عند 3	عند 4
100	100	100	100
0	ل	ل	0
ل	ل	0	0



$$\frac{1}{4} \text{ ل سم} = \frac{0 \times 100 + 100 + 100 + 0 \times 100}{100 + 100 + 100 + 100} = \text{سم}$$

$$\frac{1}{4} \text{ ل سم} = \frac{100 + 100 + 0 \times 100 + 0 \times 100}{100 + 100 + 100 + 100} = \text{ص}$$

∴ مركز الثقل يبعد عن كل من \vec{a} و \vec{b} $\frac{1}{4}$ ل سم

حل آخر:

∴ الأربع كتل متساوية عند رؤوس المربع

∴ مركز ثقل المجموعة يقع في مركز المربع أي: $(\frac{ل}{4}, \frac{ل}{4})$

$$(10)$$

$$(9)$$

$$(11)$$

(1) معادلات الاتزان:

$$س = و \text{ ماه}$$

$$2 \text{ و ماه} = و \text{ ماه} + م \text{ س}$$

$$\therefore و \text{ ماه} = م \text{ (و ماه)}$$

$$\therefore م \text{ س} = \frac{\text{ماه}}{\text{ماه}} = \text{طاه}$$

∴ قياس زاوية الاحتكاك = هـ

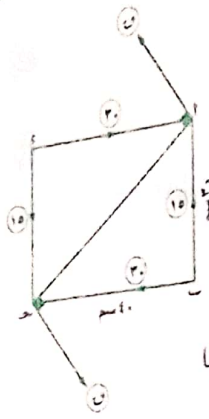
$$(ب) \text{ مقدار قوة رد الفعل المحصل} = \sqrt{م^2 س^2 + م^2 س^2}$$

$$= \sqrt{م^2 س^2 + م^2 س^2} = \sqrt{2} م س$$

$$= \sqrt{م^2 س^2 + م^2 س^2} = \sqrt{2} م س$$

$$(12)$$

$$(11)$$



القوتين (30، 20)

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$20 \times 20 = 400$$

$$900 = 30 \times 30$$

القوتين (15، 30) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$450 = 15 \times 30$$

$$200 = 10 \times 20$$

$$300 = 15 \times 20$$

$$300 = 15 \times 20$$

$$6 = 20 \times 30$$

١٠

١١

$$(1) \quad \vec{A} = \vec{B} - \vec{C} = (2, 2, 1) - (2, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{D}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{C} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$11 - 5 + 7 = 13$$

طول العمود من نقطة (ب)

$$\frac{\sqrt{(7-1)^2 + (5-2)^2 + (11-2)^2}}{\sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-1)^2}} = \frac{\sqrt{49+9+81}}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{\sqrt{139}}{\sqrt{2}} = 8.37$$

$$3.73 = \text{وحدة طول}$$

(ب) من هندسة الشكل :

$$\sqrt{(12)^2 + (9)^2} = 15$$

$$10 =$$

$$\sqrt{(10)^2 + (20)^2} = 22.36$$

$$20 =$$

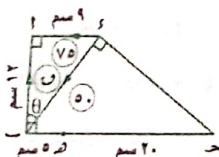
$$0 = \text{حزب}$$

$$0 = 20 \times 20 - 12 \times 70 + 20 \times 50$$

$$76 = 76 \text{ نيوتن}$$

$$12 \times 70 + 50 \times 76 - 20 \times 50 = 0$$

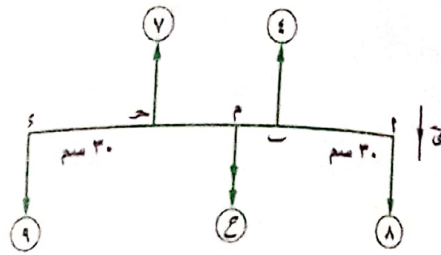
$$720 = 520 + 50 \times \frac{12}{10} \times 50 =$$



٢

١

٢



$$6 = 9 + 7 - 4 - 8$$

وتعمل فى اتجاه القوتين ٩، ٨ نيوتن

وبفرض أن نقطة تأثير المحصلة عند م $\exists \bar{A}$

مجموع عزوم القوى حول \bar{A} = عزم المحصلة حول \bar{A}

$$9 \times 6 = 4 \times 9 + 8 \times 7 - 30 \times 4$$

$$54 = 36 + 56 - 120$$

$$54 = 36 + 56 - 120$$

٤

القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

القوتان (٢٠، ٢٠)

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$200 = 20 \times 20$$

$$20 = 20 \times 20$$

$$12.5 = 20 \times 20$$

$$100 = 20 \times 20$$

القضيب يميل على الرأس لأسفل بزاوية قياسها ٢٠ أو ١٥٠

٦

٥

٧

الساق متزن

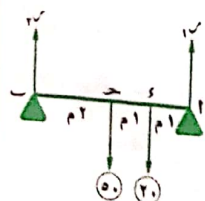
$$70 = 10 + 10$$

$$0 = \text{حزب}$$

$$0 = 4 \times 10 - 2 \times 50 + 1 \times 20$$

$$30 = 30 \text{ ثكجم}$$

$$40 = 40 \text{ ثكجم}$$





١٢ ب

١٣ ا

١٤

(١) من معادلات الاتزان :

$$1 \text{ م} \times \frac{1}{4} = 1 \text{ م} \times \frac{1}{4}$$

$$1 \text{ م} \times \frac{2}{4} + 1 \text{ م} \times \frac{1}{4} = 0$$

$$(2) \text{ و} =$$

من (١) ، ينتج أن :

$$1 \text{ م} \times \frac{2}{4} + 1 \text{ م} \times \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore 1 \text{ م} \times \frac{1}{4} = 0$$

، مح = صفر

$$\therefore \text{و} \times \frac{1}{4} \text{ م} - 1 \text{ م} \times \frac{2}{4} = 0$$

$\times \text{ م} = \text{صفر}$ بالقسمة على (١ م)

$$(4) \therefore 1 \text{ م} - 1 \text{ م} \times \frac{2}{4} = 0$$

بالتعويض من (٢) في (٤) :

$$1 \text{ م} - 1 \text{ م} \times \frac{2}{4} = 0$$

$$\therefore 1 \text{ م} = 0$$

$$\therefore \text{و} (د) \approx 90^\circ$$

(ب) بفرض أن مقدار مركبتي

رد فعل المفصل عند

هما 1 م ، 1 م

من معادلات الاتزان :

$$1 \text{ م} = 1 \text{ م}$$

$$1 \text{ م} = 0$$

$$1 \text{ م} = 0 \therefore 1 \text{ م} \times \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore 1 \text{ م} \times \frac{2}{4} = 1 \text{ م} \times \frac{1}{4}$$

$$\text{أي} : 1 \text{ م} = \frac{1}{4}$$

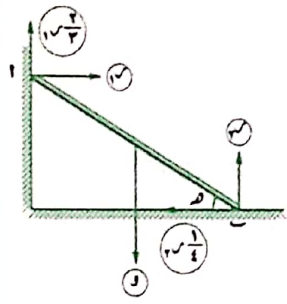
وبالتعويض في (١) : $1 \text{ م} = \frac{1}{4}$ و 1 م

وبالتعويض في (٢) : $1 \text{ م} = 0$ و $1 \text{ م} = 0$

$$\therefore 1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

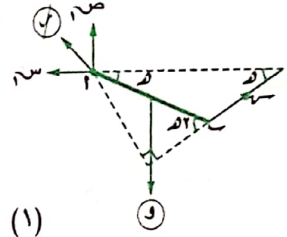
$$\therefore 1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

$$1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$



(٢)

(٤)



(١)

(٢)

١٥ ا

١٦ ب

١٧

الجسم على وشك الحركة لأعلى :

$$\therefore 1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

$$\therefore 1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

$1 \text{ م} = 0$

$$1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 1 \text{ م} + 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

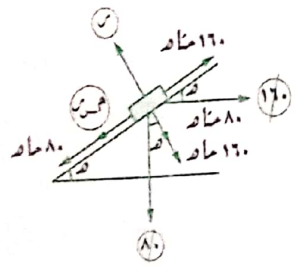
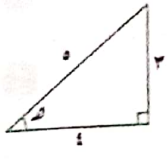
$$\frac{1}{4} \times 1 \text{ م}$$

$$1 \text{ م} \times 1 \text{ م} = 1 \text{ م} \times 1 \text{ م}$$

$$\frac{1}{4} \times 1 \text{ م} +$$

$$\therefore 1 \text{ م} = 1 \text{ م}$$

$$\therefore 1 \text{ م} = \frac{1}{4}$$



١٨

مساحة المستطيل لـ حـ : مساحة المستطيل لـ حـ

$$8 \times 12 : 4 \times 6 =$$

$$= 1 : 4$$

\therefore نفرض أن كتلة المستطيل لـ حـ = 4

، نفرض أن كتلة المستطيل لـ حـ = 4

وبفرض الاتجاهين المتعامدين \vec{A} ، \vec{B}

الكتلة	لـ حـ	لـ حـ
س	٩	٦
ص	٦	٤

$$\therefore 1 \text{ م} = \frac{6 \times 4 + 9 \times 6}{4 + 6} = 0$$

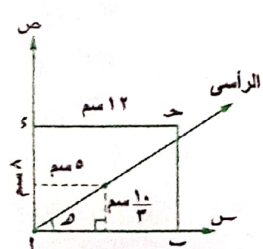
$$1 \text{ م} = \frac{4 \times 4 + 6 \times 6}{4 + 6} = \frac{1}{3}$$

\therefore مركز ثقل الجزء المتبقى (0 ، $\frac{1}{3}$)

أي A : مركز الثقل يبعد عن \vec{A} مسافة 0 سم

، عن \vec{B} مسافة $\frac{1}{3}$ سم

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0$$



$$\frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}|} = \text{طول العمود من } \vec{r} = \frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{\sqrt{(1-)^2 + (8-)^2 + (4-)^2}}{\sqrt{(4-)^2 + (2-)^2 + (3-)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{29}}{29} \approx 1.67 \text{ وحدة طول}$$

$$\text{ج (ب) ح} = 20 \times 100 = 2000 \text{ م}^2 \times 80 = 160000 \text{ م}^2 \times 40 = 640000 \text{ م}^2 \times 20 = 1280000 \text{ م}^2$$

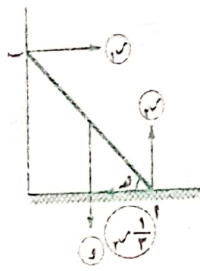
المحصلة تمر بالنقطة ح

$$\text{ج} = 20 \times 100 = 2000 \text{ م}^2 \times 80 = 160000 \text{ م}^2 \times 40 = 640000 \text{ م}^2 \times 20 = 1280000 \text{ م}^2$$

معيار عزم المحصلة حول «أ» = 3600 نيوتن.سم

ب

ب



(أ) القضيبي متزن

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}$$

$$\frac{1}{3} \vec{r} = \frac{1}{3} \vec{r}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \vec{r} = \frac{1}{3} \vec{r} \quad (1)$$

$$\text{ج} = \text{صفر}$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r}$$

$$\text{ومن (1) : } \therefore \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \vec{r} = \frac{1}{3} \vec{r}$$

$$\therefore \frac{2}{3} \vec{r} = \frac{2}{3} \vec{r}$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{r} \approx 0.619^\circ$$

(ب) القضيبي متزن :

$$\text{ج} = \text{صفر}$$

$$40 \times 6 - 20 \times 8 =$$

$$= 60 \times \text{م}^2 \times \text{م} =$$

$$= 60 \times \frac{4}{5} \times \text{م}^2 \times \text{م} + 480 =$$

$$\therefore \text{م} = 10 \text{ نيوتن}$$

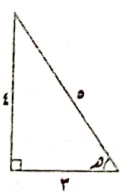
$$\text{م} = \text{م}^2 \times \text{م} =$$

$$\therefore \text{م} = \frac{2}{3} \times 10 = 6.67 \text{ نيوتن}$$

$$\text{م} + \text{م}^2 \times \text{م} = 8 + 6 =$$

$$\therefore \text{م} = \frac{4}{5} \times 10 + \text{م}^2 \times \text{م} = 14$$

$$\therefore \text{م} = 6 \text{ نيوتن}$$



٢

١

٢

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$$

(1)

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$$

$$(3, -1) \times (2, -2) + (4, -2) \times (1, -1) =$$

$$(7, -3) \times (1, -1) +$$

$$= \vec{r} + \vec{r} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$$

(2)

من (1)، (2) ينتج أن :

المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = 8 وحدة عزم.

٤

ح	س	م	ه
الكتلة	١٥	١٠	٥
س	٠	٤٠	٤٠
ص	٠	٠	٤٠

$$\text{س} = \frac{0 \times 20 + 40 \times 5 + 40 \times 10 + 0 \times 15}{20 + 5 + 10 + 15} = 12$$

$$\text{ص} = \frac{20 \times 20 + 40 \times 5 + 0 \times 10 + 0 \times 15}{20 + 5 + 10 + 15} = 12$$

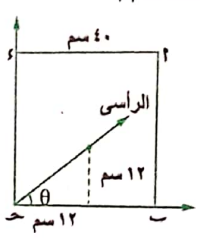
$$\therefore \text{مركز الثقل} = (12, 12)$$

$$\text{م} = \frac{12}{12} = \theta$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

أي أنه : س يح ميل على الرأسى

بزاوية ٤٥°



٦

٥

٧

$$(1) \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{r}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{r} & \vec{r} \\ 4- & 1 & 1- \\ 4 & 2- & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{r} - \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r}$$

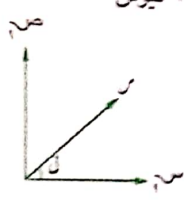


$$\sqrt{26 + 26} = \sqrt{(ص)^2 + (س)^2} = ر$$

$$\sqrt{26} = 2 \text{ نيوتن}$$

$$1 = \frac{1}{2} = \text{طال}$$

$$2 = 1 = \text{ذل}$$



11

12

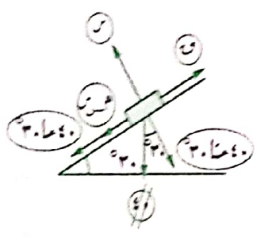
الجسم على وشك الحركة :

$$ر = 40 \text{ ح}$$

$$\sqrt{20} = 20 \text{ نيوتن}$$

$$ر = 40 \text{ ح} + 30 \text{ ح}$$

$$\sqrt{20} = 20 + 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \text{ نيوتن}$$



14

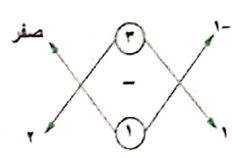
$$\vec{r} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$2 = \sqrt{2} + \sqrt{9} = \sqrt{2} + 3$$

$$2 = \sqrt{2} + 3$$

$$2 = \sqrt{2} + 3$$

نفرض أن خط عمل المحصلة يقطع \vec{r} في نقطة ح ونقسم \vec{r} من الخارج بنسبة 1 : 3

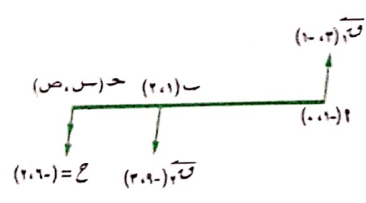


$$\vec{r} = \frac{1 - 1 \times 2}{1 - 3} = \frac{1 - 2}{1 - 3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r} = \frac{1 - 2 \times 2}{1 - 3} = \frac{1 - 4}{1 - 3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$(2, 2) =$$

حل آخر :



بفرض أن نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع \vec{r} هو «ح»

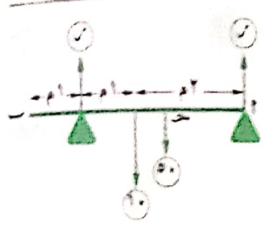
$$\vec{r} = \vec{v} + \vec{w} = \sqrt{2} + \sqrt{9} = \sqrt{2} + 3$$

$$2 = \sqrt{2} + 3$$

$$2 = \sqrt{2} + 3$$

$$2 = \sqrt{2} + 3$$

$$(2, 2) =$$



القضيب متزن :

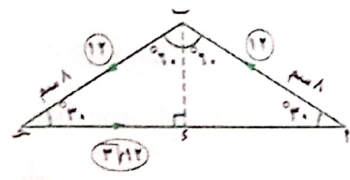
$$10 + 50 = 20$$

$$20 = 20 \text{ كجم ، ح} = 0$$

$$0 = 2 \times 20 - 2 \times 10 + 1 \times 50$$

$$0 = 40 - 20 + 50$$

أي أنه : النقل 50 كجم يوضع على بعد 1,4 متر من أ الكي يتساوى الضغط على كل من الحاملين.



من هندسة الشكل :

$$8 = 4 \text{ سم}$$

$$4 = 4 \text{ سم}$$

$$8 = 8 \text{ سم}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{3 \times 8} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

القوى في اتجاه دورى واحد ،

المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه

$$2 \times \text{مساحة المثلث} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} \times \left[4 \times 3 \times 8 \times \frac{1}{3} \right] \times 2 =$$

$$48 \text{ نيوتن سم}$$

(١) $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{L}$ $(0, 2, -2) \times (1, 1, 1) = \vec{L}$

$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2+2) - \vec{j}(2) + \vec{k}(2) = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

طول العمود من نقطة الأصل ،

$\|\vec{L}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

(ب) $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{j}$

$\vec{L} = -5\vec{j}$ ، $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

$\vec{L} = -5\vec{j}$ ، $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

عزم \vec{L} حول \vec{v}

$\vec{L} = -5\vec{j}$ ، $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

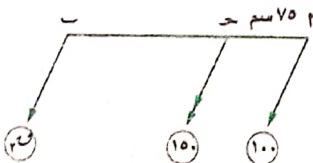
$\vec{L} = -5\vec{j}$ ، $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

$\vec{L} = -5\vec{j}$ ، $\vec{r} = (1, 0, 5)$ ، $\vec{v} = (2, 0, 0)$

ب

ب

١٠



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

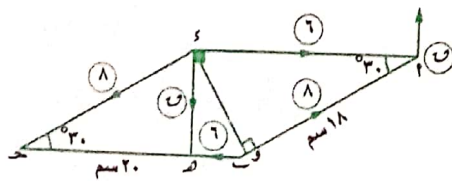
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

١١



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

١

٢

٣

٤

من شروط الاتزان :

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

عند تعليق ثقل عند س يجعل القضيب على وشك الدوران

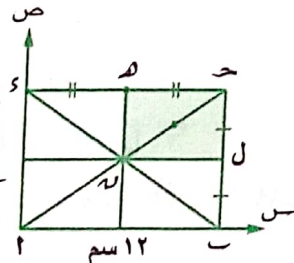
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

من شروط الاتزان :

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد



مساحة المستطيل AB : مساحة المستطيل CD

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

بفرض أن كتلة المستطيل AB = CD

كتلة المستطيل AB = CD ، $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

الكتلة	\vec{L}	\vec{v}
س	٩	٦
ص	٦	٤

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ، \vec{r} في اتجاه واحد

مركز ثقل الجزء المتبقى هو $(\frac{1}{3}, 0)$

٦

٥



القوتين (٦، ٦) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\therefore ج = ٦ \times ٩ = ٥٤ \text{ نيوتن سم}$$

القوتين (٨، ٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (د)

$$\therefore ج = ٨ \times ١٠ = ٨٠ \text{ نيوتن سم}$$

$$\therefore ج = ج + ج = ٢٦ \text{ نيوتن سم}$$

$$\therefore ج = ٢٦ \text{ نيوتن سم}$$

القوتان (١٠، ١٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$٢٦ = \text{نيوتن سم}$$

$$\therefore ٢٦ = ٢٠ \times ١,٣ \quad \therefore ١,٣ = \text{نيوتن}$$

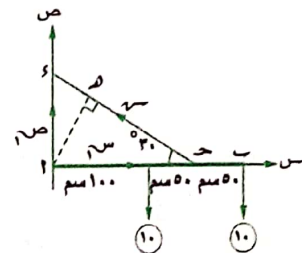
$$\therefore \text{القوتان } ١,٣، ١,٣ \text{ نيوتن}$$

١٢ د

١٢ ا

١٤

(١)



القضيب متزن $\therefore \text{سم} = \text{سم}$

$$\therefore \text{سم} - \text{سم} = ٢٠ \text{ سم} = \text{سم}$$

$$\therefore \text{سم} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\text{سم} = \text{سم}$$

$$\therefore \text{سم} + \text{سم} - ٢٠ \text{ سم} = ١٠ - ١٠ = ٠$$

$$\therefore \text{سم} = ٢٠ - \frac{١}{٢} = ١٩,٥$$

$$\text{سم} = ١٩,٥$$

$$\therefore ١٠ \times ١٠ - ٢٠ \times ١٠ + ٢٠ \times \text{سم} = ١٠ \times ٢ = \text{سم}$$

$$\text{حيث } ٧٥ = ١٥٠ \text{ سم} = ٢٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ٧٥ = \text{سم}$$

$$\therefore \text{سم} = \frac{٢٠ \times ١٠}{٧٥} = ٢٦,٦$$

$$\text{من (١)، (٢):}$$

$$\therefore \text{سم} = \frac{٢٠}{٢} \times ٤٠ = ٤٠ \text{ سم}$$

$$\text{سم} = ٢٠ - ٢٠ = ٠$$

\therefore رد فعل المفصل أفقى

ويساوى ٢٠ نيوتن ويعمل فى اتجاه \leftarrow

(ب) بفرض أن أكبر مسافة يستطيع أن

يصعد بها الرجل = سم يكون

عندها السلم على وشك الانزلاق

معادلات الاتزان :

$$\text{سم} = ٢٠ + ٨٠ = ١١٠$$

$$\text{سم} = \frac{٢}{٥} = ١٠$$

$$\therefore \text{سم} = \frac{٢}{٥} \times ١١٠ = ٤٤ \text{ ث كجم}$$

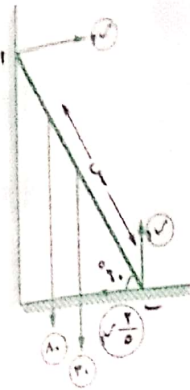
$$\text{سم} = \text{صفر}$$

$$\therefore ٢٠ \times \frac{٥}{٢} \text{ سم} + ٨٠ \times \text{سم} = ٦٠$$

$$\text{سم} \times ٥ = ٦٠ \text{ سم} = \text{صفر}$$

$$٣٧,٥ + ٤٠ \text{ سم} - ١١٠ = ٣٧,٥ \text{ صفر}$$

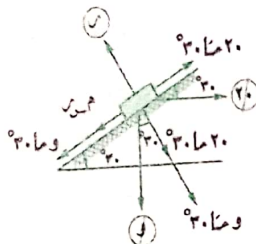
$$\therefore \text{سم} \approx ٢,٨٢ \text{ متر}$$



١٦ ج

١٥ ب

١٧



$$\therefore ١٩,٦ = ٩,٨ \times ٢ = ١٩,٦ \text{ نيوتن}$$

\therefore الجسم على وشك الحركة لأعلى

$$\therefore \text{سم} = ٢٠ \text{ سم} + ٢٠ \text{ سم} + ٢٠ \text{ سم} = ٦٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سم} = ٢٠ \text{ سم} + ١٩,٦ = ٣٩,٦$$

$$= ٣٩,٦ + ١٠ = ٤٩,٦$$

$$\therefore ٢٠ \text{ سم} = \text{سم} + ٢٠ \text{ سم} = ٤٠ \text{ سم}$$

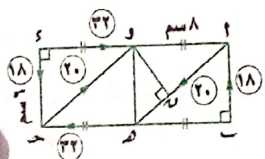
$$\therefore ١٠ = ٣٩,٦ + (١٠ + ٣٩,٦) \times \text{سم} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سم} = ٢٧,٨٨$$

١٨

من هندسة الشكل :

$$\text{و } ٤,٨ = \frac{٨ \times ٦}{١٠} = ٤,٨$$



القوتان (٢٢، ٢٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\text{سم} = ٢٢ \times ٦ = ١٣٢ \text{ نيوتن سم}$$

القوتان (٢٠، ٢٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (د)

$$\text{سم} = ٢٠ \times ٤,٨ = ٩٦ \text{ نيوتن سم}$$

القوتان (١٨، ١٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (د)

$$\text{سم} = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨ \text{ نيوتن سم}$$

$$\therefore \text{عزم الازدواج المحصل} = ١٩٢ - ٩٦ - ٢٨٨ = \text{صفر}$$

\therefore المجموعة متزنة.

١ ٢

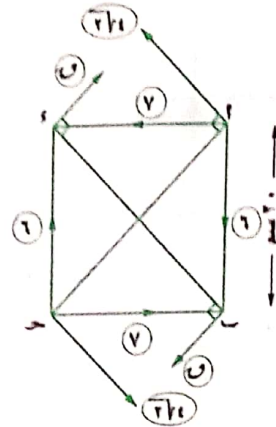
١ ٢

∴ مجموع عزوم القوى حول ب = عزوم المحصلة حول ب

∴ خط عمل المحصلة ∴ ع = صفر

$$∴ ١٦ \times ٤٥ - ١٠ \times ١٢ + ٤٠ \times ٧ - ٦ \times ٨ = ٠$$

$$∴ ١٩.٨ = ٧ \text{ نيوتن}$$



∴ القوتين (٧، ٧) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$∴ ع = ٢٠ \times ٧ = ١٤٠ \text{ نيوتن سم}$$

، القوتين (٦، ٦) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$∴ ع = ٢٠ \times ٦ = ١٢٠ \text{ نيوتن سم}$$

، القوتين (٢٧٤، ٢٧٤) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ع)

$$∴ ع = ٢٧٤ \times ٢٠ = ١٦٠ \text{ نيوتن سم}$$

$$(١) ∴ ع = ع + ع + ع = ١٦٠ + ١٢٠ - ١٤٠ = ١٤٠$$

$$= ١٨٠ \text{ نيوتن سم}$$

(ب) ∴ شرط الاتزان ع = - ع

$$∴ ١٨٠ = - ع$$

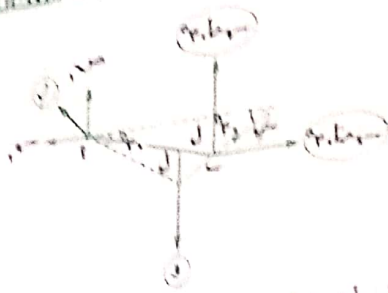
$$∴ ع = \frac{٢٧٩}{٢} \text{ نيوتن}$$

$$∴ \text{القوتان } \frac{٢٧٩}{٢} ، \frac{٢٧٩}{٢} \text{ نيوتن}$$

١ ٢

١ ٢

(١)



بفرض أن مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند ب هما س_١ ، س_٢ وطول القضيب ٢ ل

∴ معادلات الاتزان :

$$س_١ - \frac{٢٧}{٢} = ٢٠ \text{ ما}$$

(١)

$$س_٢ - ١ - ١ - ١ = ٢٠ \text{ ما}$$

(٢)

$$٠ = ع$$

$$∴ س_١ \times ٢ - ٢٠ \times ٢ - ١٠ \times ٢ = ٠$$

$$∴ س_١ = ٢٠$$

$$\text{ومن (١) : } س_٢ = \frac{٢٧}{٢} - ١ - ١ - ١ = \frac{٢٧}{٢} - ٣$$

$$\text{، من (٢) : } س_٢ = ١ - ١ - ١ - ١ = -٢$$

$$∴ م = \sqrt{س_١^2 + س_٢^2} = \sqrt{٢٠^2 + ٢^2} = \sqrt{٤٠٤} = ٢٠.١$$

$$∴ م = \frac{٢٧}{٢}$$

(ب) معادلات الاتزان :

$$س_١ = \frac{١}{٢} م ، س_٢ = م$$

$$∴ س_١ = \frac{١}{٢} م ، ع = صفر$$

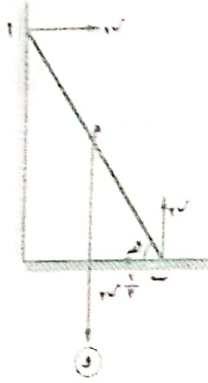
$$∴ ع = \frac{١}{٢} م - م = -\frac{١}{٢} م$$

$$= صفر$$

$$∴ ع = \frac{١}{٢} م - م = -\frac{١}{٢} م$$

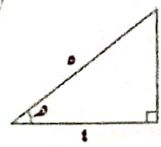
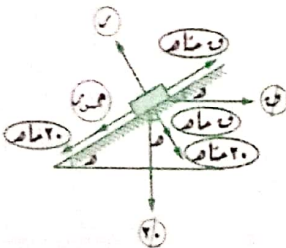
$$∴ ع = \frac{١}{٢} م = \frac{١}{٢} م$$

$$∴ ع = \frac{٢}{٢} م = م$$



١ ٢

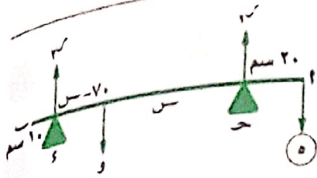
١ ٢



١٠

١٥

١٦



• عند تعليق
ثقل ٥ ث.كجم

من أ فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ح

$$\therefore \text{س} = \text{صفر} ، \text{ح} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{و} = \text{س} - 20 \times 5 = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{و} = \text{س} = 100$$

(١)

• عند تعليق ثقل ٤ ث.كجم من ب يصبح القضيب على وشك
الدوران حول ح

$$\therefore \text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{ح} = \text{صفر}$$

$$\therefore 10 \times 4 - (70 - \text{س}) = \text{صفر}$$

$$\therefore 40 - 70 + \text{س} = \text{صفر}$$

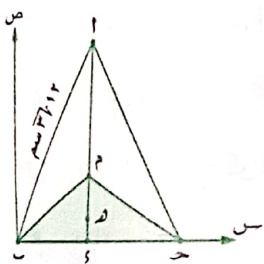
(٢)

وبالتعويض من (١) : $\therefore 100 + 40 = 70$ و

$$\therefore \text{و} = 2 \text{ ث.كجم} ، \text{من (١)}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{100}{2} = 50 \text{ سم}$$

• وزن القضيب ٢ ث.كجم ، يؤثر على بعد ٧٠ سم من أ



كتلة المثلث المقطوع

$$= \frac{1}{4} \text{ كتلة المثلث الأصلي.}$$

نفرض أن كتلة Δ ح-ب-ح

$$= 2 \text{ ك عند م}$$

$$(6, \sqrt{2}6) =$$

$$\text{كتلة } \Delta \text{ ح-ب-ح} = \text{ك عند م} = (2, \sqrt{2}6)$$

الكتلة	ك٢	ك١
س	$\sqrt{2}6$	$\sqrt{2}6$
ص	٦	٢

$$\therefore \text{س} = \frac{\sqrt{2}6 \times \text{ك} - \sqrt{2}6 \times \text{ك}^2}{\text{ك} - \text{ك}^2}$$

$$\text{ص} = \frac{2 \times \text{ك} - 6 \times \text{ك}^2}{\text{ك} - \text{ك}^2} = 8$$

مركز ثقل الجزء المتبقى = $(8, \sqrt{2}6)$

١٧

• الجسم على وشك الحركة لأعلى :

$$\therefore \text{س} = 20 \text{ مانه} + \text{و مانه}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{2}{5} \times \text{و} + \frac{4}{5} \times 20$$

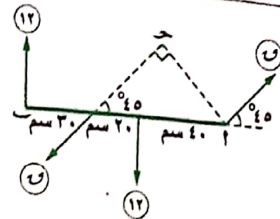
$$\therefore \frac{2}{5} \times \text{و} - \text{س} = 16$$

$$\text{و مانه} = \text{س مانه} + 20 \text{ مانه}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \times 20 + \text{س} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{5} \times \text{و}$$

$$\therefore \frac{4}{5} \times \text{و} - \frac{1}{4} \times \text{س} = 12$$

من (١)، (٢) : $\therefore \text{و} = 40 \text{ ث.كجم}$



$$\text{أ} = 60 \text{ مانه} = 20 \sqrt{2} \text{ سم}$$

القوتان (١٢، ١٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ح)

$$\text{حيث ح} = 12 - 50 \times 12 = 600 \text{ نيوتن سم}$$

القوتان (٥، ٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ح)

$$\text{حيث ح} = 20 \sqrt{2} \times 5$$

$$\therefore \text{ح} = 20 \sqrt{2} \times 5 = 600$$

$$\therefore \text{و} = 10 \sqrt{2} \text{ نيوتن}$$

١٢

١٣

١٤

$$\therefore \text{ح} = \text{س} - \text{و} = \text{و}$$

$$\therefore 10 = 2 \times \text{و} - 2 \times \text{و} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{و} & \text{ح} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \text{و} \times \text{و} = \text{و}^2$$

$$= 12 \times \text{و} - 10 \times \text{و} - 4 \times \text{و} = 0$$

طول العمود من نقطة الأصل

$$\frac{\|\text{ح}\|}{\|\text{و}\|} = \frac{\sqrt{2(4-)^2 + 2(10-)^2 + 2(12-)^2}}{\sqrt{2(2-)^2 + 2(4-)^2 + 2(4-)^2}} = \frac{60\sqrt{2}}{3} = \text{وحدة طول}$$

$$(ب) \text{ ر} = \text{س} - \text{و} = \text{و} = (4, 2-)$$

$$\therefore \text{ح} = \text{و} \times \text{و} = \text{و}^2$$

$$\therefore 2- = \text{و} (4-10) = \text{و}^2$$

$$\therefore 2- = 4-10 = \text{و}^2$$

$$\text{ل} = \frac{\|\text{ح}\|}{\|\text{و}\|} = \frac{2}{\sqrt{2(50-)^2 + 2(2-)^2}} = \text{وحدة طول}$$

(١) بفرض أن طول القضيب = ٢ ل

∴ القضيب متزن
∴ س - ١ سم - ٦٠ ما = صفر

∴ س = ٦٠ ما
∴ س = ١ سم
ص = صفر

(١) ∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم

(٢) ∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم

∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم

∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم

∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم
∴ ص = ٦٠ ما + ١ سم

(٢) من (١) : س = ١ سم
∴ س = ١ سم
∴ س = ١ سم

من (٢) : ص = ٢ نيوتن
∴ ص = ٢ نيوتن
∴ ص = ٢ نيوتن

∴ ص = ٢ نيوتن
∴ ص = ٢ نيوتن
∴ ص = ٢ نيوتن

(ب) بفرض أن س = ١

معادلات الاتزان :

و = ٢ سم

(١) ∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

بالتعويض في (١) : ∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

٩

٨

١٠

(١) ∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

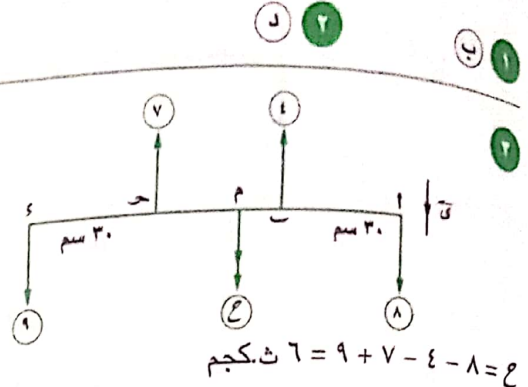
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى خط عمل القوة

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم
∴ و = ٢ سم



∴ و = ٢ سم

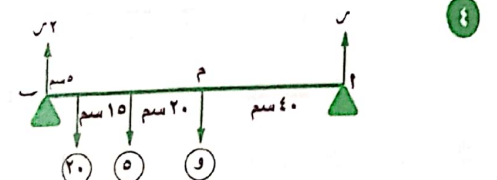
وتعمل في اتجاه القوتين ٨ ، ٩ ث.كجم

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم



من شروط الاتزان :

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم

∴ و = ٢ سم

من (١) : ∴ و = ٢ سم

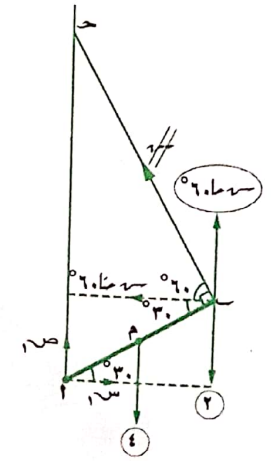
رد الفعل عند ٢ = ٢٠ نيوتن ، عند س = ٤٠ نيوتن

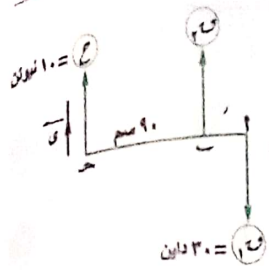
٦

٥

٧

(١)





∴ ع > القوى الصغرى
∴ القوتان في اتجاهين متضادين

$$∴ ١٠ - ٣٠ = ٢٠$$

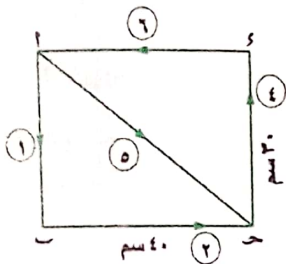
$$∴ ٢٠ = ٤٠ \text{ داین}$$

$$٩٠ \times ٤٠ = (٩٠ + ١٠) ٢٠$$

$$٣٦٠٠ = ٢٧٠٠ + ٩٠٠$$

$$∴ ٢٠ = ١٠ \text{ سم}$$

ایاه: طول القضيب = ٢٠ سم



$$(١) \text{ ع} = ٢٢٠ = ٢٠ \times ٢ + ٤٠ \times ٤ \text{ ث.جم.سم}$$

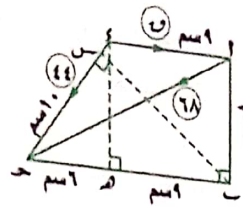
$$(٢) \text{ ع} = ٢٢٠ = ٤٠ \times ١ + ٢٠ \times ٦ \text{ ث.جم.سم}$$

$$\text{ع} = ٢٢٠ = \frac{٤٠ \times ٢٠}{٥} \times ٥ + ٢٠ \times ٢ + ٤٠ \times ١$$

$$(٣) ٢٢٠ = \text{ث.جم.سم}$$

من (١)، (٢)، (٣):

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٢٢٠ ث.جم.سم



(ب) ∴ ع = صفر

$$∴ ٦٨ + ٨ \times ١٠ = ١٠ \times ٨ + ١٥ \times ٨$$

$$\frac{٨}{١٠} \times ١٥ \times ٤٤ + \frac{١٥ \times ٨}{١٧} \times$$

صفر =

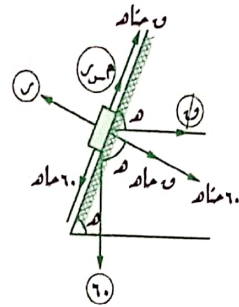
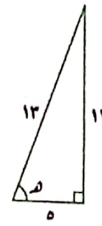
$$∴ ٥٢٨ + ٤٨٠ + ١٠٨ = ١٠٠٨$$

$$∴ ١٢٦ = ١٠٠٨$$

(ج) ١٢

(ب) ١١

(ج) ١٢



∴ الجسم على وشك الانزلاق

$$∴ \text{ع} + \text{م} = ٦٠ \text{ حاه}$$

$$(١) \frac{١٢}{١٣} \times ٦٠ = \frac{٢}{٣} \times ٦٠ + \frac{٥}{١٣} \times ٦٠$$

$$(٢) \text{ع} + \frac{١٢}{١٣} \times ٦٠ = ٦٠ + \frac{١٢}{١٣} \times ٦٠$$

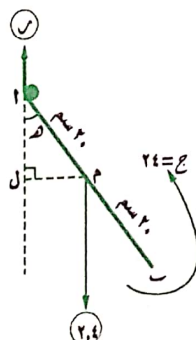
بالتعويض من (٢) في (١):

$$∴ \frac{٧٢٠}{١٣} = \left[\frac{٢٠٠}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} \right] \frac{٢}{٣} + \frac{٥}{١٣} \times ٦٠$$

$$٧٢٠ = (٢٠٠ + ١٢) \frac{٢}{٣} + ٥ \times ٦٠$$

$$٧٢٠ = ٢٠٠ + ٨٠ + ٥ \times ٦٠$$

$$∴ ١٣ = ٥٢٠ \quad ∴ ٤٠ = ١٣ \text{ نيوتن}$$



∴ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٢، ٤) (٢، ٤)

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$= ٢٤ - \text{ث.كجم.سم}$$

$$∴ ٢٤ = \text{ث.كجم.سم}$$

$$٢٤ = \text{م} \times ٢, ٤$$

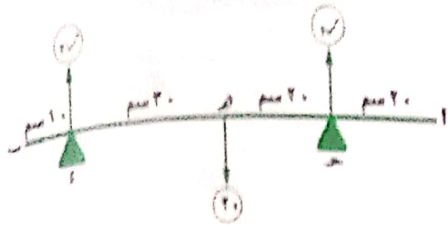
$$∴ \text{م} = ١٠ \text{ سم}$$

$$∴ ٢٠ = ١٠, ١٥٠$$

∴ القضيب يميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها ٣٠° أو ١٥٠°

(ج) ١٦

(ب) ١٥



١٧

أولاً :

من شروط الاتزان : $r_1 + r_2 = 20$

(١)

ع = صفر

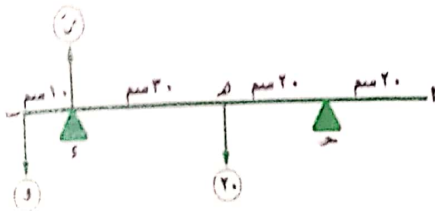
$$0 = 20 \times 20 - 50 \times r_2$$

$\therefore r_2 = 8$ نيوتن

ومن (١) : $r_1 = 12$ نيوتن

أي أنه : $r_1 = 12$ نيوتن ، $r_2 = 8$ نيوتن

ثانياً :



* عند تعليق ثقل عند ب يجعل القضيب على وشك الدوران حول

ع = صفر

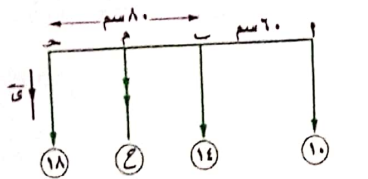
من شروط الاتزان :

$$r_1 + 20 = 9$$

$$\therefore 9 + 20 = 20 \times 20 - 10 \times 9 = \text{صفر}$$

$$\therefore 9 = 60 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{ض } 80 = 60 + 20 = 80 \text{ نيوتن}$$



$$ع = 10 + 14 + 18 = 42 \text{ نيوتن}$$

وتعمل في اتجاه القوى الثلاثة

∴ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

$$\therefore 14 \times 60 + 18 \times 14 + 10 \times 18 = 42 \times 80$$

$$\therefore 80 \text{ سم حيث م } \exists \text{ أ ح}$$

∴ المحصلة تبعد 80 سم عن النقطة «أ»

$$\therefore 75000 = 20 \times 2000$$

$$\therefore 75000 = 20 \times 2000$$

$$\therefore \frac{1}{20} = 2000$$

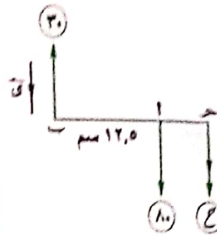
$$\therefore \text{ (د) } 40 = 120$$

∴ أ ح يميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها 40° ، 120°

١٢

١١

١٢



$$ع = 30 - 80 = 50$$

وتعمل في اتجاه القوة 80 دايين

$$80 = 20 \times (12.5 + 1)$$

$$\therefore 8 = 27.5 + 2 = 29.5$$

$$\therefore 27.5 = 8$$

$$\therefore 7.5 = 8$$

∴ نقطة تأثير المحصلة ح \exists أ ، ح \nexists أ ب

$$8 = 7.5$$

١٤

القوتين (20 ، 20)

تكونان ازدواجاً قياسه

الجبرى (ع)

$$\therefore 20 \times 20 = 400$$

$$= 900 \text{ ث.جم.سم}$$

∴ القوتين (15 ، 15) تكونان ازدواجاً

قياسه الجبرى (ع)

$$\therefore 60 = 15 \times 40 = 600 \text{ ث.جم.سم}$$

$$\therefore 200 = 60 + 60 = 120 \text{ ث.جم.سم}$$

∴ شرط التوازن ع = ع

$$\therefore 200 = 50 \times 4$$

$$\therefore 6 = 6 \text{ ث.جم}$$

∴ القوتان 6 ، 6 ث.جم

١٦

١٥

إجابات امتحانات

دور اول ٢٠١٩

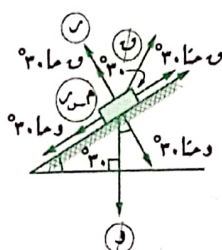
- ١ (١) (ب) (٢) (٣) (د)
٤ (ب) (٥) (٦) (د)

٢

(١) ∴ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى بزاوية ٢٠°

$$\therefore \text{مس} = \text{طا} = ٢٠^\circ$$

∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى بتأثير القوة



$$\therefore \text{مس} = ٢٠^\circ + \text{مس} + \text{مس} = ٢٠^\circ + \text{مس} + \text{مس}$$

$$\therefore \frac{٢\sqrt{2}}{٢} = \frac{١}{٢} \times ١٦ + \text{مس} \Rightarrow \frac{٢\sqrt{2}}{٢} = \frac{١}{٢} \times ١٦ + \text{مس}$$

$$\therefore \frac{٢\sqrt{2}}{٢} = \frac{١}{٢} \times ١٦ + \text{مس} \Rightarrow ٨ = \text{مس} + \frac{١}{٢} \times ١٦$$

$$\text{مس} + \frac{١}{٢} \times ١٦ = ٨ \Rightarrow \text{مس} = ٨ - \frac{١}{٢} \times ١٦$$

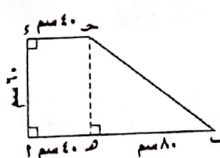
$$\text{مس} = ٨ - \frac{١}{٢} \times ١٦ = ٨ - ٨ = ٠$$

$$\therefore \frac{٢\sqrt{2}}{٢} = \text{مس} + \frac{١}{٢} \times ١٦ \Rightarrow \frac{٢\sqrt{2}}{٢} = ٨$$

من (١)، (٢):

$$\therefore \text{مس} = ٨ \text{ ث. كجم} , \text{مس} = ٨ \text{ ث. كجم}$$

(ب) مساحة المستطيل ١ هـ حـ : مساحة المثلث هـ ب حـ



$$٦٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} : ٦٠ \times ٤٠ =$$

$$١ : ١ =$$

∴ نفرض أن كتلة المستطيل

$$= \text{ك} \text{ وتؤثر عند النقطة } (٣٠ , ٢٠)$$

∴ كتلة المثلث = ك وتؤثر عند النقطة

$$(٢٠ , \frac{٢٠٠}{٣}) = (\frac{٠ + ٦٠ + ٠}{٣} , \frac{١٢٠ + ٤٠ + ٤٠}{٣})$$

الكتلة	ك	ك
س	٢٠	٢٠٠
ص	٢٠	٢٠

الثانوية الأزهرية

$$\therefore \text{مس} = \frac{٢٠ + \frac{٢٠٠}{٣}}{٢} = \frac{١٢٠ + ٢٠٠}{٦} = \frac{٣٢٠}{٦} = \frac{١٦٠}{٣}$$

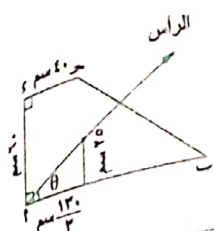
$$\text{ص} = \frac{٢٠ + \frac{٢٠٠}{٣}}{٢} = \frac{١٢٠ + ٢٠٠}{٦} = \frac{٣٢٠}{٦} = \frac{١٦٠}{٣}$$

∴ بُعد مركز ثقل الصفحة عن كل من:

$$\overline{أ}, \overline{ب} \text{ هما } \frac{١٢٠}{٣} \text{ سم}$$

$$\text{مس} = ٢٥$$

$$\frac{١٥}{٢٦} = \frac{٢٥}{\frac{١٢٠}{٣}} = \theta$$



٢

$$(١) \vec{أ} - \vec{ب} = \vec{أ} - \vec{ب} = (٢, ٢, ١)$$

$$\therefore \vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{ع} & \vec{ص} & \vec{س} \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب}$$

$$\vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب}$$

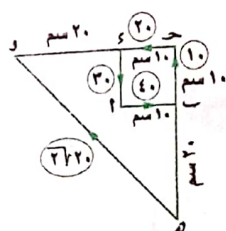
$$\vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب}$$

$$\vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب}$$

∴ طول العمود من نقطة الأصل

$$\frac{\|\vec{ع} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{ع}\|} = \frac{\sqrt{٢(٤-١) + ٢(٤-١) + ٢(٤-١)}}{\sqrt{٢(١) + ٢(٢) + ٢(١)}} = \frac{\sqrt{١٢}}{\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{\sqrt{١٠}}$$

(ب)



$$\vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب} = \vec{ع} \times \vec{ب}$$

$$(١) \text{مس} = ١٠٠ \text{ ث. كجم}$$

$$\text{مس} = ٢٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٤٠ = ٢٠٠٠$$

$$(٢) \text{مس} = ١٠٠ \text{ ث. كجم}$$

$$\text{مس} = ٢٠ \times ٢٠ - ١٠ \times ٤٠ + ٢٠ \times ١٠ = ٢٠٠$$

$$(٣) \text{مس} = ١٠٠ \text{ ث. كجم}$$

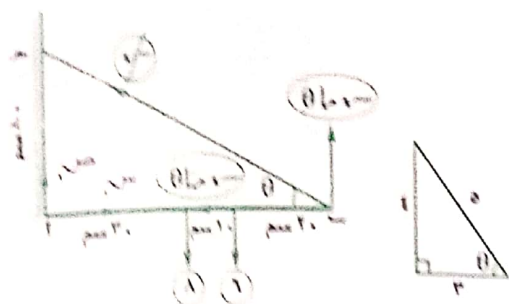
من (١)، (٢)، (٣):

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ١٠٠ ث. كجم. سم



دور ثان ٢٠١٩

٣ (1)



$$\textcircled{1} \text{ سحر} = \sqrt{(٨٠)^2 + (٦٠)^2} = ١٠٠ \text{ سم}$$

معادلات الاتزان :

$$(١) \quad \frac{٢}{٥} \times ١٠٠ = ١٠ \text{ سم} \quad \therefore \text{سحر} = ١٠ \text{ سم}$$

$$(٢) \quad ١٤ = ١٠ \text{ سم} + \frac{٢}{٥} \times ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ١٠ \text{ سم} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\textcircled{2} \text{ من (١) : } \therefore \text{سحر} = ٦ \text{ نيوتن}$$

$$\text{من (٢) : } \therefore \text{سحر} = ٦ \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{سحر} = \sqrt{(٦)^2 + (٦)^2} = ٨.٤ \text{ نيوتن}$$

$$\text{طاهر} = ١ \quad \therefore \text{هـ} = ٥^\circ$$

\therefore رد فعل المفصل يصنع زاوية قياسها ٥° مع الأفقى.

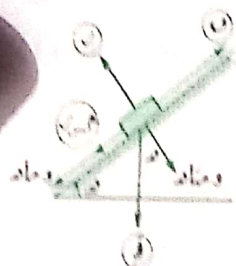
$$(ب) \quad \therefore \text{القضيب متزن} \quad \therefore ٢٠ = ١٠ + ١٠$$

$$\text{سحر} = ١٠$$

$$\therefore ٢٠ = ١٠ + ١٠ \quad \therefore \text{سحر} = ١٠$$

$$\therefore ١٠ = ١٠$$

$$\text{من (١) : } \therefore ١٠ = ١٠$$



$$\textcircled{1} (1) \quad \therefore \text{الجسم على وشك}$$

الحركة لأعلى

$$\therefore \text{سحر} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سحر} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ٢٠ \text{ سم} = ١٠ \text{ سم} + ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ١٠ \text{ سم} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\text{بقسمة (٢) على (١) : } \therefore \text{طاهر} = ١$$

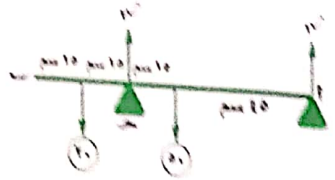
$$\therefore \text{طاهر} = ١$$

١ (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)



٧ (1)

من شروط الاتزان :

$$\therefore ٧ = ١٠ + ١٠$$

$$\text{سحر} = ١٠$$

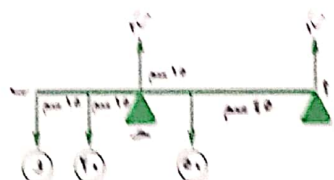
$$\therefore ٧ = ١٠ + ١٠$$

$$\therefore ٧ = ١٠$$

$$\text{من (١) : } \therefore ٧ = ١٠$$

$$\therefore ٧ = ١٠$$

• عند تعليق ثقل «هـ» عند س فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ



$$\therefore \text{سحر} = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠ + ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

(١)

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

(٢)

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

$$\therefore ١٥ = ١٠$$

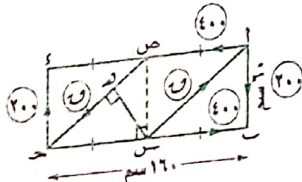
OPPO A1K

إجابات امتحانات الثانوية الأزهرية

$$\begin{aligned} \therefore -4 - 3 = 0 & \quad \therefore -4 = 3 \\ \therefore -4 = 3 & \quad \therefore -4 = 3 \\ \therefore -4 = 3 & \quad \therefore -4 = 3 \end{aligned}$$

طول العمود من نقطة الأصل ،

$$\frac{\| \vec{r} \|}{\| \vec{r} \|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 1$$



$$\text{سم } 48 = \frac{80 \times 60}{100}$$

، القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

(ج) حيث ج = ١٦٠ × ٢٠٠ = - ٣٢٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

(ج) حيث ج = ٦٠ × ٤٠٠ = ٢٤٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (٤٠ ، ٢٤) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

(ج) حيث ج = ٤٨ × ٤٠ = ١٩٢٠ نيوتن.سم

∴ عزم الازدواج المحصل = ٦٤٠٠ نيوتن.سم

$$\therefore 6400 = 1920 + 24000 + 32000$$

$$\therefore 6400 = 1920 + 24000 + 32000$$

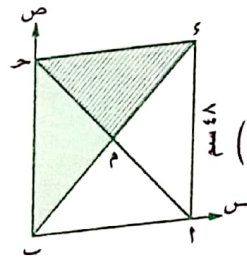
$$\vec{r} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{و } \vec{r} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

(ب) نأخذ الاتجاهين

المتعامدين \vec{r} ، \vec{s}

، مركز ثقل المثلث \vec{r}



$$\left(\frac{24 + 0 + 0}{3}, \frac{24 + 0 + 48}{3} \right) = (8, 24)$$

، مركز ثقل المثلث \vec{r}

$$(24, 40) = \left(\frac{48 + 24 + 0}{3}, \frac{48 + 24 + 48}{3} \right)$$

، مركز ثقل المثلث \vec{r}

$$(24, 8) = \left(\frac{48 + 24 + 0}{3}, \frac{0 + 24 + 0}{3} \right)$$

الكتلة	٢	٤	٤
س	٨	٢٤	٤٠
ص	٢٤	٨	٢٤

$$\therefore \text{سم } 20 = \frac{40 \times 4 + 24 \times 8 + 8 \times 2}{4 + 8 + 24}$$

$$\text{ص } 20 = \frac{24 \times 4 + 8 \times 8 + 24 \times 2}{4 + 8 + 24}$$

أي أ هـ: مركز الثقل يبعد ٢٠ سم عن كل من \vec{r} ، \vec{s}

٥

(أ) نفرض أن نقطة تأثير القوة هي (س ، ٤ ، ٤)

$$\therefore \vec{r} = (س ، ٤ ، ٤)$$

$$\vec{r} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 4 & س \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} \times \vec{r} = (س - ٢ - ٤) \vec{e}_1 - (٤ - ٢ - ٤) \vec{e}_2 + (٨ - ٢ - ٤) \vec{e}_3$$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \times \vec{u} = \vec{0} \therefore$$

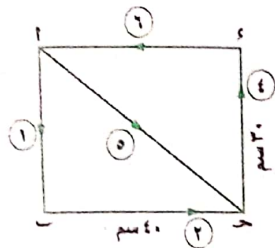
$$\frac{(1, -8, 6)}{\sqrt{(1)^2 + (-8)^2 + (6)^2}} \times \sqrt{2} \vec{u} =$$

$$(0, -4, 3) =$$

$$(0, -4, 3) \times (1, 0, 0) = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \therefore$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}(12) - \vec{j}(3) =$$



(ب)

$$(1) \quad 220 = 20 \times 2 + 40 \times 4 = \text{كجم سم}$$

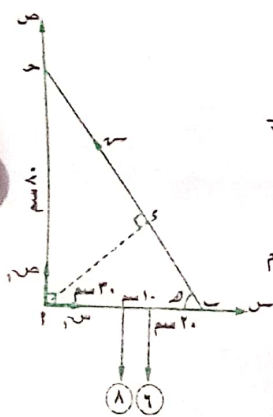
$$(2) \quad 220 = 40 \times 1 + 20 \times 6 = \text{كجم سم}$$

$$\frac{40 \times 20}{50} \times 5 + 20 \times 2 + 40 \times 1 = \text{كجم سم}$$

$$(3) \quad 220 = \text{كجم سم}$$

من (1)، (2)، (3) :

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = 220 كجم سم



(أ) في Δ أ ب ج :

$$\sqrt{(80)^2 + (60)^2} = \text{ح}$$

$$100 = \text{سم}$$

$$48 = \frac{80 \times 60}{100} = \text{سم}$$

\therefore القضيبي متزن

$$\therefore \text{سم} = 0$$

$$\therefore \text{سم} - \text{سم} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{سم} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\therefore \text{سم} = \frac{2}{5} = (1)$$

$$\therefore \text{ص} = 0$$

$$\therefore \text{ص} = 8 - 6 - \text{ما} = 2$$

دور اول ٢٠٢٠

(أ) (٢)

(ب) (٢)

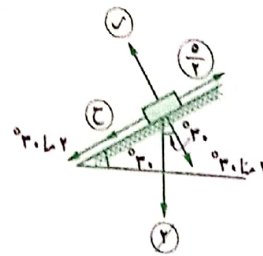
(ج) (١)

(د) (٦)

(هـ) (٥)

(١) (٤)

(٢)



$$(1) \therefore \text{و ما} = 2 \text{ ما} = 20 = 1$$

$$\therefore \text{و ما} < \text{و ما}$$

\therefore ح تعمل في اتجاه خط

أكبر ميل لأسفل

\therefore الجسم متزن

$$\frac{5}{3} = 1 + 2 \therefore$$

$$\therefore 2 = 3 \text{ كجم}$$

$$\text{سم} = 2 = 20 = \frac{3}{2} \times 2 = 30 \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{سم} = 3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 2.25 \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{سم} = 3$$

\therefore الجسم يكون على وشك الحركة لأعلى

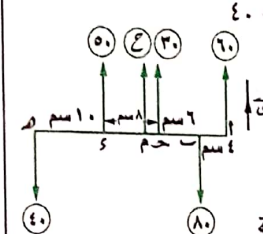
$$(ب) \quad 40 - 80 - 50 + 20 + 60 = \text{ح}$$

$$20 = \text{كجم}$$

واتجاهها في نفس اتجاه

القوى الثلاث الأولى ويفرض

$\exists \vec{M} \rightarrow$ نقطة تأثير المحصلة



\therefore مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

$$\therefore 10 \times 20 - 4 \times 80 =$$

$$-20 = 28 \times 40 + 18 \times 50 =$$

$$\therefore -20 = 240 =$$

$$\therefore 12 \text{ سم وتقع على اليمين من «أ»}$$

$$\therefore \vec{M} \rightarrow \vec{M} \rightarrow \vec{M} \rightarrow$$

\therefore المحصلة تبعد 12 سم عن النقطة «أ» في اتجاه $\vec{M} \rightarrow$

(٢)

(أ) من هندسة الشكل :

$$(0, 8, 6) = \text{ص} , (10, 0, 0) = \text{أ}$$

$$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = (1, -8, 6)$$



١

١ (د)

٤ (ب)

٢

(١) من هندسة الشكل :

$$٨ = \sqrt{(٨)^2 - (١٠)^2} = ٦$$

نفرض أن السلم متزن

$$٨ = ١٠$$

$$٢٠ = ٢٠$$

$$٨ = ٨$$

$$٨ \times ١٠ - ٢ \times ٢٠ = ٨٠ - ٤٠ = ٤٠$$

$$٧,٥ = ١٠$$

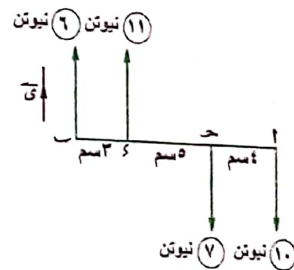
$$٧,٥ = ٨$$

$$٧,٥ > ٥ = ٢٠ \times \frac{١}{٤} = ٥$$

∴ مقدار ح عند ١ = ٥ مرس ∴

∴ السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة لأن $٨ < ٧,٥$

(ب)



بفرض أن \vec{H} متجه وحده في الاتجاه الرأسى إلى أعلى

$$(١) \quad \vec{H} = ١١ - ١٠ - ٦ + ٦ = ١$$

$$١٢ \times ٦ - ٩ \times ١١ - ٤ \times ٧ = ٧٢ - ٩٩ - ٢٨ = -٥٥$$

$$= -١٤٢ \text{ نيوتن.سم}$$

من (١)، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى

لعزمه = -١٤٢ نيوتن.سم

٢

(١) ∴ الجسم على وشك

الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط

$$\frac{٢٧}{٣} = ٩ \text{ مرس} = ٩ \text{ مرس}$$

* بعد تأثير القوة \vec{H} :

∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى

$$٩ = ٩ + ١٠ = ١٩ \text{ مرس}$$

$$\frac{٢٧}{٣} = ٩ \text{ مرس} = ٩ \text{ مرس}$$

$$٩ = ٩ \text{ مرس}$$

(ب) ∴ $\vec{H} = ٩$ مرس

$$٦ \times ٤ - ١ \times ١ = ٢٣$$

$$٢٣ = ٢٣$$

$$\frac{١}{٢٧} \times ٥ \times ٢٧ = ٥$$

$$٩ = ٩ + ١٥ - ٢٤ - ١ = ١$$

$$٩ = ٩$$

$$\frac{٢٧}{٣} \times ٤ = ٣٦$$

٤

(١)

$$\frac{١}{٣} \times ٤ \times ٤ \times ٢ + ٢٤ + ٢٤ = ٤٨$$

$$٤٨ = ٤٨$$

∴ الجسم على

وشك الحركة

$$\frac{٢٧}{٣} = ٩ \text{ مرس}$$

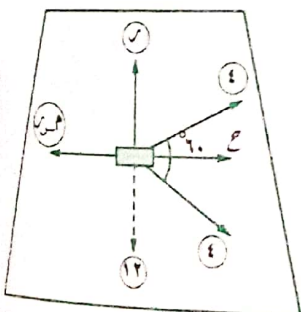
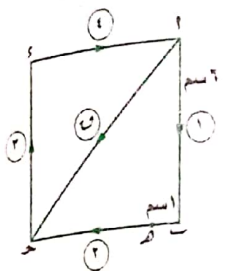
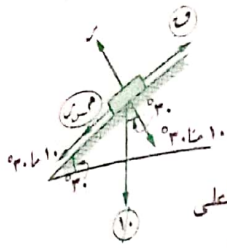
$$١٢ = ١٢$$

$$\frac{٢٧}{٣} = ٩ \text{ مرس}$$

$$\frac{١}{٣٧} = ٩ \text{ مرس}$$

$$\frac{١}{٣٧} = ٩ \text{ مرس}$$

∴ قياس زاوية الاحتكاك $\alpha = ٢٠^\circ$



٥

$$(1) \vec{s} - \vec{a} = \vec{c} = (-1, 1, 4)$$

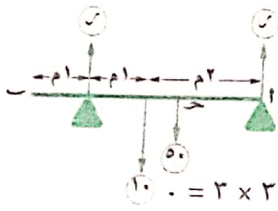
$$\therefore \vec{c} = \vec{s} \times \vec{a} = (-1, 1, 4) \times (2, 3, 4)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{a} & \vec{c} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{s}(3-8) + \vec{a}(4-16) + \vec{c}(2-12)$$

$$\therefore 4 + 4 + 12 = 20 \therefore 20 = 20$$

(ب) ∴ اللوح متزن



$$\therefore 50 + 20 = 70$$

$$\therefore 20 = 20 \text{ كجم، ج.م.}$$

$$\therefore 50 \times 1 = 20 \times 2 = 40$$

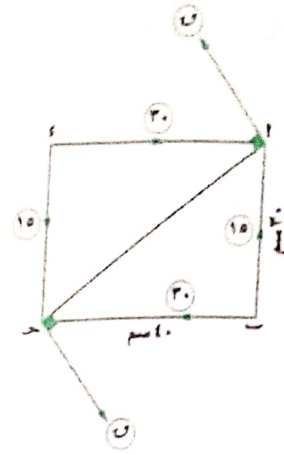
$$\therefore 50 = 40$$

$$\therefore 4 = 1.4 \text{ متر}$$

أي أ: الطفل يقف على بعد 1.4 متر من الطرف «أ» لكي

يتساوى ردا الفعل على الحاملين.

(ب)



∴ القوتين (20، 20) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\therefore \text{ج.م.} = 20 \times 20 = 400 \text{ ث.ج.م.سم}$$

∴ القوتين (15، 15) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى (ج)

$$\therefore \text{ج.م.} = 15 \times 15 = 225 \text{ ث.ج.م.سم}$$

$$\therefore \text{ج.م.} = 225 + 175 = 400 \text{ ث.ج.م.سم}$$

∴ شرط التوازن ج = ج

$$\therefore 300 = 50 \times 6$$

$$\therefore 6 = 6 \text{ ث.ج.م.}$$

∴ القوتان 6، 6 ث.ج.م.